数列（一）

知识点：

1. 数列概念及其简单表示
2. 等差数列问题
3. 等比数列问题

例题讲解：

例 1 已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 中， $S_2 = 16$ ，且 a_1, a_4, a_5 成等比数列.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式； (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

例 2. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_3 = 12$, $S_{12} > 0$, $S_{13} < 0$.

- (1) 求公差 d 的取值范围.
- (2) 指出 $S_1, S_2, \dots, S_{12}$ 中哪一个值最大, 并说明理由.

例 3 已知公差大于零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_3 \cdot a_4 = 117$, $a_2 + a_5 = 22$.

- (1) 求通项公式 a_n ; (2) 求 S_n 的最小值;
- (3) 若数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $b_n = \frac{S_n}{n+c}$, 求非零常数 c .

例 4. 设数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 为常数, 且 $a_{n+1} = 3^n - 2a_n (n \in N^*)$.

- (1) 判断数列 $\{a_n - \frac{3^n}{5}\}$ 是否为等比数列, 请说明理由;
- (2) S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和, 若 $\{S_n\}$ 是递增数列, 求 a_1 的取值范围.

例 5 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 前 n 项和为 S_n 且 $S_{n+1} = \frac{3}{2}S_n + 1, (n \in N^*)$

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求满足不等式 $\frac{S_n}{T_n} < 3$ 的正整数 n 取值范围.

例 6. 已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1, a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{3}a_n + n & (n \text{ 为奇数}) \\ a_n - 3n & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$.

- (1) 是否存在实数 λ , 使数列 $\{a_{2n} - \lambda\}$ 是等比数列? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 请说明理由;
- (2) 若 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 求满足 $S_n > 0$ 的所有正整数 n .

巩固练习:

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = -2$, $a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{97} = 50$, 那么 $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{99}$ 的值是()

- A. -78 B. -82 C. -148 D. -182

2. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_8 = 4S_4$, 则 $a_{10} = (\quad)$

- A. $\frac{17}{2}$ B. $\frac{19}{2}$ C. 10 D. 12

3. 若两等差数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 前 n 项和分别为 A_n 、 B_n , 满足 $\frac{A_n}{B_n} = \frac{2n-1}{3n+3}, n \in N_+$, 则 $\frac{a_5}{b_5}$ 的值为 $(\quad)$

- A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{17}{30}$ D. $\frac{4}{3}$

4. 在 2 和 8 之间插入 n 个正数, 使这 $n+2$ 数成等比数列, 则该数列的公比是 $(\quad)$

- A. $4^{\frac{1}{n+1}}$ B. $2^{\frac{1}{n+1}}$ C. $2^{\frac{1}{n}}$ D. $4^{\frac{1}{n}}$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\log_3 a_{n+1} = \log_3 a_n + 1 (n \in N^*)$, 且 $a_2 + a_4 + a_6 = 9$, 则 $\log_{\frac{1}{3}}(a_3 + a_5 + a_7) = (\quad)$

- A. 5 B. $\frac{9}{91}$ C. 4 D. -3

6. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 中 $a_9 = 9a_7$, 若存在两项 a_m 、 a_n , 使 $a_m a_n = 27a_1^2$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{16}{n}$ 的最小值为 $(\quad)$

- A. 5 B. $\frac{21}{5}$ C. $\frac{5}{16}$ D. $\frac{65}{4}$

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (3n+7) \times 0.9^n$, 则数列 $\{a_n\}$ 的最大项是 $(\quad)$

- A. a_5 B. a_6 C. a_7 D. a_8

8. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = 2n + \frac{k}{n}$, 若对任意 $n \in N_+$, 都有 $a_n \geq a_3$ 成立, 则实数 k 的取值范围为 $(\quad)$

- A. $[12, 24]$ B. $(12, 24]$ C. $[3, 12]$ D. $[3, 12]$

9. 若 a, b 是函数 $f(x) = x^2 - px + q (p > 0, q > 0)$ 的两个不同的零点, 且 $a, b, -2$ 这三个数可适当排序后成等差数列, 也可适当排序后成等比数列, 则 $p+q$ 的值等于_____.

10. 已知在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 a_2 a_3 = 1, \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{7}{2}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

11. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知第 1 项到第 10 项的和为 20, 第 11 项到第 20 项的和为 1020, 则第 21 项到第 30 项的和为_____.

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + 3^2 a_3 + \dots + 3^{n-1} a_n = \frac{n+1}{3}$, $a_n =$ _____.

13. 数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = (n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n (n \in N^*)$, 试问该数列 $\{a_n\}$ 有没有最大项? 若有, 求出最大项; 若没有, 说明理由.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $a_n = 1 - 2S_n (n \in N^*)$.

(1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列;

(2) 设函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x, b_n = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n), T_n = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots + \frac{1}{b_n}$, 求 T_{100} .

15. 设函数 $f(x) = \log_2 x - \log_x 4 (0 < x < 1)$, 数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 满足 $f(2^{a_n}) = 2n (n \in N^+)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列.

答案

例 1. 解: (1) 由 $S_2 = 16$, a_1, a_4, a_5 成等比数列, 得 $\begin{cases} 2a_1 + d = 16 \\ (a_1 + 3d)^2 = a_1(a_1 + 4d) \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a_1 = 9 \\ d = -2. \end{cases}$

所以等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 11 - 2n (n \in N^*) \dots \dots \dots$ (6分)

(2) 当 $n = 5$ 时, $T_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n = -n^2 + 10n$.

当 $n = 6$ 时, $T_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$

$$= a_1 + a_2 + \dots + a_5 - a_6 - a_7 - \dots - a_n$$

$$= 2S_5 - S_n$$

$$= 2 \times (-5^2 + 10 \times 5) - (-n^2 + 10n)$$

$$= n^2 - 10n + 50,$$

故 $T_n = \begin{cases} -n^2 + 10n (n = 5) \\ n^2 - 10n + 50 (n = 6). \end{cases} \dots \dots \dots$ (12分)

例 2. 解: (1) 依题意, 有 $S_{12} = 12a_1 + \frac{12 \times (12-1)}{2} \cdot d > 0$,

$$S_{13} = 13a_1 + \frac{13 \times (13-1)}{2} \cdot d < 0$$

即 $\begin{cases} 2a_1 + 11d > 0 \text{ ①} \\ a_1 + 6d < 0 \text{ ②} \end{cases}$

由 $a_3 = 12$, 得 $a_1 = 12 - 2d$ ③,

将③式分别代①、②式, 得 $\begin{cases} 24 + 7d > 0 \\ 3 + d < 0 \end{cases}$

$$\therefore -\frac{24}{7} < d < -3.$$

(2) 由 $d < 0$ 可知 $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_{12} > a_{13}$.

因此, 若在 1 到 12 中存在自然数 n , 使得 $a_n > 0$, $a_{n+1} < 0$,

则 S_n 就是 $S_1, S_2, \dots, S_{12}$ 中的最大值.

$$\Rightarrow \begin{cases} 6(a_1 + a_{12}) = 6(a_6 + a_7) > 0 \\ \frac{13}{2}(a_1 + a_{13}) = \frac{26a_7}{2} = 13a_7 < 0 \end{cases},$$

$$\therefore a_6 > 0, a_7 < 0,$$

故在 $S_1, S_2, \dots, S_{12}$ 中 S_6 的值最大.

例 3. 解: (1) $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\therefore a_3 + a_4 = a_2 + a_5 = 22$.

$$\text{又 } a_3 \cdot a_4 = 117,$$

$\therefore a_3, a_4$ 是方程 $x^2 - 22x + 117 = 0$ 的两实根.

又公差 $d > 0$, $\therefore a_3 < a_4$, $\therefore a_3 = 9, a_4 = 13$,

$$\therefore \begin{cases} a_1 + 2d = 9 \\ a_1 + 3d = 13 \end{cases}, \text{ 解得 } a_1 = 1, d = 4,$$

$\therefore$ 通项公式 $a_n = 4n - 3$.

(2) 由 (1) 知 $a_1 = 1, d = 4$,

$$\therefore S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 2n^2 - n = 2\left(n - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}.$$

$\therefore$ 当 $n = 1$ 时, S_n 最小, 最小值为 $S_1 = a_1 = 1$.

$$(3) \text{ 由 (2) 知 } S_n = 2n^2 - n, \therefore b_n = \frac{S_n}{n+c} = \frac{2n^2 - n}{n+c},$$

$$\therefore b_1 = \frac{1}{1+c}, \quad b_2 = \frac{6}{2+c}, \quad b_3 = \frac{15}{3+c}.$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列,

$$\therefore 2b_2 = b_1 + b_3, \text{ 即 } \frac{6}{2+c} \times 2 = \frac{1}{1+c} + \frac{15}{3+c},$$

$$\therefore 2c^2 + c = 0, \therefore c = -\frac{1}{2} (c=0 \text{ 舍去}), \text{ 故 } c = -\frac{1}{2}.$$

例 4. 解: (1) $\because a_{n+1} = 3^n - 2a_n (n \in N^*),$

$$\text{则 } a_1 \neq \frac{3}{5} \text{ 时, } \frac{a_{n+1} - \frac{3^{n+1}}{5}}{a_n - \frac{3^n}{5}} = \frac{3^n - 2a_n - \frac{3^{n+1}}{5}}{a_n - \frac{3^n}{5}} = \frac{-2(a_n - \frac{3^n}{5})}{a_n - \frac{3^n}{5}} = -2,$$

$\therefore a_1 \neq \frac{3}{5}$ 时, $\{a_n - \frac{3^n}{5}\}$ 为等比数列, 公比为 -2 .

$a_1 = \frac{3}{5}$ 时, 数列 $\{a_n - \frac{3^n}{5}\}$ 不是等比数列.

(2) $a_1 = \frac{3}{5}$ 时, $a_n = \frac{1}{5} \cdot 3^n$, 为单调递增数列, 满足条件.

$$a_1 \neq \frac{3}{5} \text{ 时, 由 (1) 可得: } a_n - \frac{3^n}{5} = (a_1 - \frac{3}{5}) \times (-2)^{n-1},$$

$$\therefore a_n = (a_1 - \frac{3}{5}) \times (-2)^{n-1} + \frac{3^n}{5} > 0,$$

$$n=2, \therefore a_2 > 0, \quad a_3 > 0,$$

$$\therefore -\frac{3}{4} < a_1 < \frac{3}{2}. \text{ 且 } a_1 \neq \frac{3}{5}.$$

综上所述可得: $-\frac{3}{4} < a_1 < \frac{3}{2}.$

例 5.解: (1) 由 $S_{n+1} = \frac{3}{2}S_n + 1$, ($n \in N^*$)

可得: $(S_{n+1} + 2) = \frac{3}{2}(S_n + 2)$,

设 $b_n = S_n + 2$, 则 $b_{n+1} = S_{n+1} + 2$

那么: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3}{2} = q$ (常数)

$\therefore$ 数列 $\{S_n + 2\}$ 是公比为 $\frac{3}{2}$, 首项为 3 的等比数列.

$$\therefore S_n + 2 = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{则 } S_n = \frac{3^n}{2^{n-1}} - 2.$$

$$\text{那么 } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} (n \geq 2)$$

当 $n=1$ 时, $a_n = 1$, 满足题意,

则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} (n \geq 1)$

(2) 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的通项公式为 $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

即数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是公比为 $\frac{2}{3}$, 首项为 1 的等比数列.

$$\therefore \text{前 } n \text{ 项和 } T_n = 3 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$$

那么: 不等式 $\frac{S_n}{T_n} < 3$, 可得 $\frac{3^n}{2^{n-1}} - 2 < 9 - 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\text{设 } \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = t, (t > 0)$$

$$\text{可得: } 6t^2 - 11t + 3 < 0.$$

$$\text{解得: } \frac{1}{3} < t < \frac{3}{2}$$

即: $\frac{1}{3} < (\frac{2}{3})^{n-1} < \frac{3}{2}$.

∴ $n=1$ 时, 满足,

当 $n=2$ 时, 满足

当 $n=3$ 时, 不满足.

正整数 n 取值范围是 $\{1, 2\}$.

例 6 解: (1) 设 $b_n = a_{2n} - \lambda$,

因为 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+2} - \lambda}{a_{2n} - \lambda} = \frac{\frac{1}{3}a_{2n+1} + (2n+1) - \lambda}{a_{2n} - \lambda} = \frac{\frac{1}{3}(a_{2n} - 6n) + (2n+1) - \lambda}{a_{2n} - \lambda} = \frac{\frac{1}{3}a_{2n} + 1 - \lambda}{a_{2n} - \lambda} \dots 2$ 分

若数列 $\{a_{2n} - \lambda\}$ 是等比数列, 则必须 $\frac{\frac{1}{3}a_{2n} + 1 - \lambda}{a_{2n} - \lambda} = q$ (常数),

即 $(\frac{1}{3} - q)a_{2n} + (q-1)\lambda + 1 = 0$, 即 $\begin{cases} \frac{1}{3} - q = 0 \\ (q-1)\lambda + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{3} \\ \lambda = \frac{3}{2} \end{cases} \dots 5$ 分

此时 $b_1 = a_2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}a_1 + 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6} \neq 0$,

所以存在实数 $\lambda = \frac{3}{2}$, 使数列 $\{a_{2n} - \lambda\}$ 是等比数列...6 分

(2) 由 (1) 得 $\{b_n\}$ 是以 $-\frac{1}{6}$ 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列,

故 $b_n = (-\frac{1}{6}) \cdot (\frac{1}{3})^{n-1} = -\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{3})^n$, 即 $a_{2n} = -\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{3})^n + \frac{3}{2} \dots 8$ 分

由 $a_{2n} = \frac{1}{3}a_{2n-1} + (2n-1)$ 得 $a_{2n-1} = 3a_{2n} - 3(2n-1) = -\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{3})^{n-1} - 6n + \frac{15}{2}$, ...10 分

所以 $a_{2n-1} + a_{2n} = -\frac{1}{2}[(\frac{1}{3})^{n-1} + (\frac{1}{3})^n] - 6n + 9 = -2 \cdot (\frac{1}{3})^n - 6n + 9$,

$S_{2n} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2n-1} + a_{2n})$

$$= -2\left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] - 6(1 + 2 + \dots + n) + 9n$$

$$= -2 \cdot \frac{\frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{3}} - 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 9n$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 - 3n^2 + 6n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3(n-1)^2 + 2 \dots 12 \text{分}$$

显然, 当 $n \in N^*$ 时, $\{S_{2n}\}$ 单调递减,

又当 $n=1$ 时, $S_2 = \frac{7}{3} > 0$, 当 $n=2$ 时, $S_4 = -\frac{8}{9} < 0$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $S_{2n} < 0$;

$$S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{5}{2} - 3n^2 + 6n.$$

同理, 当且仅当 $n=1$ 时, $S_{2n-1} > 0$,

综上, 满足 $S_n > 0$ 的所有正整数 n 为 1 和 2...16 分

1. 解: 由题意可得 $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{99} = a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{97} + 33 \times 2d$

$$= 50 + 33 \times 2 \times (-2) = -82, \text{ 故选: } B.$$

2. 解: $\because \{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, $S_8 = 4S_4$,

$$\therefore 8a_1 + \frac{8 \times 7}{2} \times 1 = 4 \times \left(4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}\right), \text{ 解得 } a_1 = \frac{1}{2}. \text{ 则 } a_{10} = \frac{1}{2} + 9 \times 1 = \frac{19}{2}.$$

故选: B .

$$3. \text{ 解: 由题意可得 } \frac{a_5}{b_5} = \frac{2a_5}{2b_5} = \frac{a_1 + a_9}{b_1 + b_9} = \frac{\frac{9(a_1 + a_9)}{2}}{\frac{9(b_1 + b_9)}{2}} = \frac{A_9}{B_9} = \frac{2 \times 9 - 1}{3 \times 9 + 3} = \frac{17}{30}$$

故选: C .

$$4. \text{ 解: 设 } a_1 = 2, \text{ 则 } a_{n+2} = 8, \text{ 所以 } q^{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_1} = 4,$$

$$\text{所以 } q = \frac{1}{4^{n+1}}. \text{ 故选: } A.$$

5. 解：根据题意，数列 $\{a_n\}$ 满足 $\log_3 a_{n+1} = \log_3 a_n + 1$ ，则 $\log_3 3a_n = \log_3 a_{n+1}$ ，即 $a_{n+1} = 3a_n$ ，
即数列 $\{a_n\}$ 是公比为3的等比数列，

若 $a_2 + a_4 + a_6 = 9$ ，则 $a_3 + a_5 + a_7 = q(a_2 + a_4 + a_6) = 27$ ，

则 $\log_{\frac{1}{3}}(a_3 + a_5 + a_7) = -\log_3(a_3 + a_5 + a_7) = -\log_3 27 = -3$ ，

故选：D.

6. 解：因为正项等比数列 $\{a_n\}$ 中 $a_9 = 9a_7$ ，

所以 $q^2 = \frac{a_9}{a_7} = 9$ ，即 $q = 3$ ，

若存在两项 a_m, a_n ，使 $a_m a_n = 27a_1^2$ ，

则 $a_1^2 \cdot 3^{n+m-2} = 27a_1^2$ ，

所以 $m+n=5, m>0, n>0, m \neq n$ ，

则 $\frac{1}{m} + \frac{16}{n} = \frac{1}{5} \left(\frac{m+n}{m} + \frac{16(m+n)}{n} \right) = \frac{1}{5} \left(17 + \frac{n}{m} + \frac{16m}{n} \right) \geq \frac{1}{5} (17+8) = 5$ ，

当且仅当 $\frac{n}{m} = \frac{16m}{n}$ 且 $n+m=5$ 即 $m=1, n=5$ 时取等号，

故选：A.

7. 解： $a_{n+1} - a_n = (3n+10) \times 0.9^{n+1} - (3n+7) \times 0.9^n = 0.9^n \left(\frac{20-3n}{10} \right) > 0$ ，解得： $n < \frac{20}{3}$ 。

可得最大项为 a_7 。故选：C.

8. 解：数列 $\{a_n\}$ 中， $a_n = 2n + \frac{k}{n}$ ，若对任意 $n \in N_+$ ，都有 $a_n \geq a_3$ 成立，

故有 $2n + \frac{k}{n} \geq 6 + \frac{k}{3}$ ， $\therefore \frac{k}{3} - \frac{k}{n} \leq 2n - 6$ ，即 $k \cdot \frac{n-3}{3n} \leq 2(n-3)$ ，

当 $n=3$ 时， $k \in R$ ，不等式恒成立；

当 $n=4$ 时， $k \leq 6n$ ，

当 $n=2$ 时， $k \leq 12$ ，

当 $n=1$ 时， $k \leq 6$ 。

综上，实数 k 的取值范围为 $[12, 24]$ ，

故选：A.

9. 解：由题意可得： $a+b=p$, $ab=q$,

$$\because p>0, q>0,$$

可得 $a>0, b>0$,

又 $a, b, -2$ 这三个数可适当排序后成等差数列, 也可适当排序后成等比数列,

$$\text{可得} \begin{cases} 2b=a-2 \\ ab=4 \end{cases} \text{①或} \begin{cases} 2a=b-2 \\ ab=4 \end{cases} \text{②.}$$

$$\text{解①得: } \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}; \text{解②得: } \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}.$$

$$\therefore p=a+b=5, q=1 \times 4=4,$$

则 $p+q=9$.

故答案为: 9.

10. 解：因为 $a_1 a_2 a_3 = 1, \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{7}{2}$,

由等比数列的性质可知, $a_1 a_3 = a_2^2$,

故 $a_2 = 1, a_1 a_3 = 1$,

$$\text{所以} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} = \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3} = \frac{5}{2},$$

$$\text{所以} a_1 + a_3 = \frac{5}{2},$$

$$\text{解可得, } \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_3 = 2 \end{cases},$$

$$\text{当} \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \text{时, } q = \frac{1}{2}, a_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{2-n},$$

$$\text{当} \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_3 = 2 \end{cases} \text{时, } q = 2, a_n = \frac{1}{2} \times 2^{n-1} = 2^{n-2}$$

故答案为: $a_n = 2^{2-n}$, 或 $a_n = 2^{n-2}$

11. 解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 由题设知: $S_{10} = 20, S_{20} - S_{10} = 1020$,

由等差数列前 n 项和性质可知: $S_{10}, S_{20} - S_{10}, S_{30} - S_{20}$ 成等差数列,

即 $20, 1020, S_{30} - S_{20}$ 成等差数列,

$$\therefore 20 + S_{30} - S_{20} = 2 \times 1020,$$

解得: $S_{30} - S_{20} = 2020,$

故答案为: 2020.

12. 解: 由 $a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \dots + 3^{n-1}a_n = \frac{n+1}{3},$ ①

得 $n \geq 2$ 时, $a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \dots + 3^{n-2}a_{n-1} = \frac{n}{3},$ ②

① - ② 得: $3^{n-1}a_n = \frac{n+1}{3} - \frac{n}{3} = \frac{1}{3},$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3^n} (n \geq 2).$$

又由 $a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \dots + 3^{n-1}a_n = \frac{n+1}{3},$ 得 $a_1 = \frac{2}{3}$ 不适合上式.

$$\therefore a_n = \begin{cases} \frac{2}{3}, & n=1 \\ \frac{1}{3^n}, & n \geq 2 \end{cases}.$$

故答案为: $\begin{cases} \frac{2}{3}, & n=1 \\ \frac{1}{3^n}, & n \geq 2 \end{cases}.$

13. 解法一: $\because a_{n+1} - a_n = (n+2)\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n$

$$= \left(\frac{10}{11}\right)^n \cdot \frac{9-n}{11},$$

$\therefore$ 当 $n < 9$ 时, $a_{n+1} - a_n > 0,$ 即 $a_{n+1} > a_n;$

当 $n = 9$ 时, $a_{n+1} - a_n = 0,$ 即 $a_{n+1} = a_n;$

当 $n > 9$ 时, $a_{n+1} - a_n < 0,$ 即 $a_{n+1} < a_n;$

故 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_9 = a_{10} > a_{11} > a_{12} > \dots$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 有最大项 a_9 或 a_{10} ,

其值为 $10 \cdot (\frac{10}{11})^9$, 其项数为 9 或 10

解法二: 设 a_n 是该数列的最大项, 则 $\begin{cases} a_n \geq a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n-1} \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} (n+1)(\frac{10}{11})^n \geq (n+2)(\frac{10}{11})^{n+1} \\ (n+1)(\frac{10}{11})^n \geq n(\frac{10}{11})^{n-1} \end{cases}$$

$\therefore 9 \leq n \leq 10$

$\therefore$ 最大项为 $a_9 = a_{10} = \frac{10^{10}}{11^9}$.

14. (1) 证明: 因为 $a_n = 1 - 2s_n$,

所以 $a_{n-1} = 1 - 2s_{n-1} (n \geq 2)$, (1分)

所以 $a_n - a_{n-1} = 2s_{n-1} - 2s_n = -2a_n (n \geq 2)$,

所以 $a_n = \frac{1}{3} a_{n-1} (n \geq 2)$ (3分)

又 $a_1 = 1 - 2s_1$, 所以 $a_1 = \frac{1}{3}$ (4分)

所以数列 $\{a_n\}$ 为首项为 $\frac{1}{3}$, 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列. (5分)

(2) 解: 因为 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$,

所以 $b_n = \log_{\frac{1}{3}} a_1 + \log_{\frac{1}{3}} a_2 + \dots + \log_{\frac{1}{3}} a_n = \log_{\frac{1}{3}} (a_1 a_2 \dots a_n) = \log_{\frac{1}{3}} (\frac{1}{3})^{1+2+\dots+n} = 1+2+\dots+n = \frac{n(1+n)}{2}$ (7分)

因为 $\frac{1}{b_n} = \frac{2}{n(1+n)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$, (9分)

所以 $T_{100} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} = 2[(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{100} - \frac{1}{101})] \dots$ (12分)

15. 解: (1) $f(x) = \log_2 x - \log_x 4 = \log_2 x - \frac{2}{\log_2 x}$,

$$f(2^{a_n}) = 2n(n \in N^+).$$

$$\text{即 } \log_2 2^{a_n} - \frac{2}{\log_2 2^{a_n}} = 2n,$$

即有 $a_n^2 - 2na_n - 2 = 0$, 此时 $0 < 2^{a_n} < 1$, $a_n < 0$,

$$\therefore a_n = n - \sqrt{n^2 + 2};$$

$$(2) \text{ 证明: } a_n = n - \sqrt{n^2 + 2} = -\frac{2}{\sqrt{n^2 + 2} + n},$$

$$a_{n+1} = -\frac{2}{\sqrt{(n+1)^2 + 2} + (n+1)},$$

由于 $\sqrt{n^2 + 2} + n$ 是递增数列,

$$\text{即有 } \sqrt{(n+1)^2 + 2} + (n+1) > \sqrt{n^2 + 2} + n,$$

$$\text{则 } \frac{2}{\sqrt{(n+1)^2 + 2} + (n+1)} < \frac{2}{\sqrt{n^2 + 2} + n},$$

即有 $a_{n+1} > a_n$,

则数列 $\{a_n\}$ 为递增数列.