江苏省仪征中学2019-2020学年第一学期高三数学周三练习（1）理科

2019.9.4

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、复数、不等式

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，计70分.不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

1．若集合P＝{－1，0，1，2}，Q＝{0，2，3}，则$P\cap Q$＝____▲____.

2．命题：“$\exists x>0$，$\sin x\leqslant x$”的否定是____▲____.

3．设i为虚数单位，则复数$z=(1+3i)i$的实部为____▲____.

4. 已知实数x,y满足不等式组$\begin{cases}y\geq 0,\\ y\leq x,\\ x+y-4\leq 0,\end{cases}$，则$z=2x-y$的最大值为____▲____.

5. 将函数$y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$的图象上的所有点向右平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位，再将图象上所有点的横坐标变为原来的$\dfrac{1}{2}$倍（纵坐标不变），则所得的图象的函数解析式为____▲____.

6．在△ABC中，已知A＝45º，C＝105º，BC＝$\sqrt{2}$，则AC＝____▲____.

7. 向量$\vec{a}=(\cos 10°,\sin 10°)$，$\vec{b}=(\cos 70°,\sin 70°)$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=$____▲____.

8. 已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\omega>0\right)$，将函数$y=f\left(x\right)$的图象向右平移$\dfrac{2}{3}\pi$个单位长度后，所得图象与原函数图象重合，则$\omega$的最小值等于____▲____.

9. 已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)=\log_2 x$，则不等式$f(x)<-1$的解集是____▲____.

10．若x＞0，y＞0，则$\dfrac{x}{x+2y}+\dfrac{y}{x}$的最小值为____▲____.

11．设P是函数$y=\sqrt{x}(x+1)$图象上异于原点的动点，且该图象在点P处的切线的倾斜角为ϑ，则ϑ的取值范围是____▲____.

12. 在△ABC中，AB＝3，AC＝2，∠BAC＝120°，$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BC}$. 若$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=-\dfrac{17}{3}$，则实数$\lambda$的值为____▲____.

13．以 C 为钝角的△ABC 中，BC＝3，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=12$，当角 A 最大时，△ABC 面积为____▲____.

14．已知 $f(x)=x^3-2x^2+x+a$，$g(x)=-2x+\dfrac{9}{x}$. 若对任意的 $x_1\in[-1,2]$，存在 $x_2\in[2,4]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，则实数 a 的取值范围是____▲____.

二、解答题：本大题共 6 小题，计 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内.

15.（本小题满分 14 分）

已知 $\vec{a}=(2\sin(x+\frac{\theta}{2}),\sqrt{3})$，$\vec{b}=(\cos(x+\frac{\theta}{2}),2\cos^2(x+\frac{\theta}{2}))$，且 $0\le\theta\le\pi$，$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\sqrt{3}$，且 $f(x)$ 为偶函数.（1）求 θ；(2) 求满足 $f(x)=1$，$x\in[-\pi,\pi]$ 的 x 的集合.

16.（本小题满分 14 分）

函数 $f(x)=\log_3(x^2+2x-8)$ 的定义域为 A，函数 $g(x)=x^2=(m+1)x+m$。

（1）若 $m=-4$ 时，$g(x)\le 0$ 的解集为 B，求 $A\bigcap B$；

（2）若存在 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 使得不等式 $g(x)\le -1$ 成立，求实数 m 的取值范围。

17.（本题满分 14 分）

已知函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\bullet\cos x$.

（1）若 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$，求函数 $f\left(x\right)$ 的值域；

（2）设 ΔABC 的三个内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 A 为锐角且 $f\left(A\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2},b=2,c=3$，求

$\cos\left(A-B\right)$ 的值.

18. （本小题满分 16 分）某工厂有 100 名工人接受了生产 1000 台某产品的总任务，每台产品由 9 个甲型装置和 3 个乙型装置配套组成，每个工人每小时能加工完成 1 个甲型装置或 3 个乙型装置．现将工人分成两组分别加工甲型和乙型装置．设加工甲型装置的工人有 x 人，他们加工完甲型装置所需时间为 t_1 小时，其余工人加工完乙型装置所需时间为 t_2 小时．设 $f(x)=t_1+t_2$.

（1）求 $f(x)$的解析式，并写出其定义域；　　（2）当 x 等于多少时，$f(x)$ 取得最小值？

19. （本小题满分 16 分）已知函数 $f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$。

（1）求函数 $f(x)$ 的定义域和值域；

（2）设$F(x)=\dfrac{a}{2}\cdot\left[f^{2}(x)-2\right]+f(x)$（$a$为实数），求$F(x)$在$a<0$时的最大值$g(a)$；

（3）对（2）中$g(a)$，若$-m^2+2tm+\sqrt{2}\le g(a)$对满足$a<0$所有的实数$a$及$t\in[-1,1]$恒成立，求实数$m$的取值范围。

20.（本小题满分 16 分）已知函数 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）曲线 $y=f(x)$在 $x=0$ 处的切线的斜率为 3，求 a 的值；

（2）若对于任意 $x\in(0，+\infty)$，$f(x)+f(-x)\geqslant 12\ln x$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（3）若 $a>1$，设函数 $f(x)$在区间[1，2]上的最大值、最小值分别为 $M(a)$、$m(a)$，

记 $h(a)=M(a)-m(a)$，求 $h(a)$的最小值.

参考答案

1．{0，2}； 2. $\forall x>0,\sin x>x$； 3. -3； 4. 8； 5. $y=\sin 4x$ ； 6. 1 ； 7. $\sqrt{3}$；

8．3； 9．$(-\infty,-2)\cup(0,\frac{1}{2})$； 10. $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$； 11. $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$； 12. $\frac{1}{3}$ ； 13. 3； 14. $-\frac{7}{4}\le a\le-\frac{3}{2}$.

15. （1）$\theta=\frac{\pi}{6}$；（2）$x\in\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\}$

16. 解：（1）由 $x^2+2x-8>0$，解得：$x<-4$ 或 $x>2$，则 $A=(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$，…2 分

若 $m=-4$，$g(x)=x^2-3x-4$，由 $x^2-3x-4\le 0$，解得：$-1\le x\le 4$，则 $B=[-1,4]$ …4 分

所以 $A\cap B=(2,4]$； …6 分

（2）存在 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 使得不等式 $x^2+(m+1)x+m\le -1$ 成立，即存在 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 使得不等式 $-m\ge\frac{x^2+x+1}{x+1}$ 成立，

所以 $-m\ge(\frac{x^2+x+1}{x+1})_{\min}$ …10 分

因为 $\frac{x^2+x+1}{x+1}=x+\frac{1}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}-1\ge 1$，当且仅当 $x+1=1$，即 $x=0$ 时取得等号

所以 $-m\ge 1$，解得：$m\le -1$. ………14 分

17. 解：（1） $f(x)=\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\cos x=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$ . . . . 2 分

由 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 得，$\frac{\pi}{3}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{4\pi}{3}$ ，$-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$ . . . . 4 分

$\therefore 0\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\le 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，即函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[0,1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ . . . . 6 分

（2）由 $f(A)=\sin\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 得 $\sin\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)=0$，

又由 $0<A<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\frac{\pi}{3}<2A+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，$\therefore 2A+\frac{\pi}{3}=\pi,A=\frac{\pi}{3}$ . . . . 8 分

在 ΔABC 中，由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=7$，得 $a=\sqrt{7}$, ... 10 分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{21}}{7}$, ... 12 分

$\because b<a$，$\therefore B<A$，$\therefore\cos B=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

$\therefore \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$ ……………………… 14 分

18. 解：(1) 因为 $t_1=\frac{9000}{x}$， $t_2=\frac{3000}{3(100-x)}=\frac{1000}{100-x}$， ………………4 分

所以 $f(x)=t_1+t_2=\frac{9000}{x}+\frac{1000}{100-x}$， ………………………5 分

定义域为 $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 99，x\in \mathbf{N}^*\}$． ………………………6 分

(2) $f(x)=1000(\frac{9}{x}+\frac{1}{100-x})=10[x+(100-x)](\frac{9}{x}+\frac{1}{100-x})$

$=10[10+\frac{9(100-x)}{x}+\frac{x}{100-x}]$． ………………………10 分

因为 $1\leqslant x\leqslant 99$，$x\in \mathbf{N}^*$，所以 $\frac{9(100-x)}{x}>0$，$\frac{x}{100-x}>0$，

所以 $\frac{9(100-x)}{x}+\frac{x}{100-x}\geqslant 2\sqrt{\frac{9(100-x)}{x}\cdot\frac{x}{100-x}}=6$， ……………………12 分

当且仅当 $\frac{9(100-x)}{x}=\frac{x}{100-x}$，即当 $x=75$ 时取等号． ……………………13 分

答：当 $x=75$ 时，$f(x)$ 取得最小值． ………………………14 分

19. 解：(1) 由 $1+x\geq 0$ 且 $1-x\geq 0$，得 $-1\leq x\leq 1$，所以定义域为 $[-1,1]$ …………2 分

又 $f(x)^2=2+2\sqrt{1-x^2}\in[2,4]$，由 $f(x)\geq 0$ 得值域为 $[\sqrt{2},2]$ …………4 分

(2) 因为 $F(x)=\frac{a}{2}\cdot\left[f^2(x)-2\right]+f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$

令 $t=f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，则 $\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}t^2-1$，

$\therefore F(x)=m(t)=a(\frac{1}{2}t^2-1)+t=\frac{1}{2}at^2+t-a,t\in[\sqrt{2},2]$ …………6 分

由题意知 g(a)即为函数 $m(t)=\frac{1}{2}at^2+t-a,t\in[\sqrt{2},2]$ 的最大值。

注意到直线 $t=-\frac{1}{a}$ 是抛物线 $m(t)=\frac{1}{2}at^2+t-a$ 的对称轴。

因为 a<0 时，函数 y=m(t)，$t\in[\sqrt{2},2]$ 的图象是开口向下的抛物线的一段，

①若 $t=-\frac{1}{a}\in(0,\sqrt{2}]$，即 $a\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 则 $g(a)=m(\sqrt{2})=\sqrt{2}$

②若 $t=-\frac{1}{a}\in(\sqrt{2},2]$，即 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\le-\frac{1}{2}$ 则 $g(a)=m(-\frac{1}{a})=-a-\frac{1}{2a}$

③若 $t=-\frac{1}{a}\in(2,+\infty)$，即 $-\frac{1}{2}<a<0$ 则 $g(a)=m(2)=a+2$ ……

综上有 $g(a)=\begin{cases}a+2, & a\ge-\frac{1}{2}\\ -a-\frac{1}{2a}, & -\frac{\sqrt{2}}{2}<a<-\frac{1}{2},\\ \sqrt{2}, & a\le-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ …………………………10 分

（3）易得 $g_{\min}(a)=\sqrt{2}$， …………12 分

由 $-m^2+2tm+\sqrt{2}\le g(a)$ 对 $a<0$ 恒成立，

即要使 $-m^2+2tm+\sqrt{2}\le g_{\min}(a)=\sqrt{2}$ 即 $m^2-2tm\ge0$ 恒成立，

令 $h(t)=-2mt+m^2$，对所有的 $t\in[-1,1]$, $h(t)\ge0$ 成立，

只需 $\begin{cases}h(-1)=2m+m^2\ge0\\ h(1)=-2m+m^2\ge0\end{cases}$，解得 $m\le-2$，或 $m=0$，或 $m\ge2$． …………16 分

20．解：解：（1）因为 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$，所以 $f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线斜率 $k=f'(0)=6a$，

所以 $6a=3$，所以 $a=\frac{1}{2}$． ……………………2 分

（2）$f(x)+f(-x)=-6(a+1)x^2\geqslant12\ln x$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

所以 $-(a+1)\geqslant\frac{2\ln x}{x^2}$． ……………………4 分

令 $g(x)=\frac{2\ln x}{x^2}$，$x>0$，则 $g'(x)=\frac{2(1-2\ln x)}{x^3}$．

令 $g'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{e}$．

当 $x\in(0,\sqrt{e})$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递增；

当 $x\in(\sqrt{e},+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递减．

所以 $g(x)_{\max}=g(\sqrt{e})=\frac{1}{e}$， ……………………6 分

所以 $-(a+1)\geqslant\frac{1}{e}$，即 $a\leqslant-1-\frac{1}{e}$，所以 a 的取值范围为 $(-\infty,-1-\frac{1}{e}]$． ………8 分

（3）因为 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$，

所以 $f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-1)(x-a)$，$f(1)=3a-1$，$f(2)=4$．

令 $f'(x)=0$，则 $x=1$ 或 a． ……………………10 分

$f(1)=3a-1$，$f(2)=4$．

①当 $1<a\leqslant\frac{5}{3}$ 时，

当 $x\in(1,a)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,a)$ 上单调递减；

当 $x\in(a,2)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(a,2)$ 上单调递增．

又因为 $f(1)\leqslant f(2)$，所以 $M(a)=f(2)=4$，$m(a)=f(a)=-a^3+3a^2$，

所以 $h(a)=M(a)-m(a)=4-(-a^3+3a^2)=a^3-3a^2+4$.

因为 $h'(a)=3a^2-6a=3a(a-2)<0$，所以 $h(a)$在$(1,\frac{5}{3}]$上单调递减，

所以当 $a\in(1,\frac{5}{3}]$时，$h(a)$最小值为 $h(\frac{5}{3})=\frac{8}{27}$. ………………………12 分

②当$\frac{5}{3}<a<2$ 时，

当 $x\in(1,a)$时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(1,a)$上单调递减；
当 $x\in(a,2)$时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(a,2)$上单调递增.
又因为 $f(1)>f(2)$，所以 $M(a)=f(1)=3a-1$，$m(a)=f(a)=-a^3+3a^2$，
所以 $h(a)=M(a)-m(a)=3a-1-(-a^3+3a^2)=a^3-3a^2+3a-1$.

因为 $h'(a)=3a^2-6a+3=3(a-1)^2\geqslant 0$．所以 $h(a)$在$(\frac{5}{3},2)$上单调递增，

所以当 $a\in(\frac{5}{3},2)$时，$h(a)>h(\frac{5}{3})=\frac{8}{27}$. ………………………14 分

③当 $a\geqslant 2$ 时，
当 $x\in(1,2)$时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(1,2)$上单调递减，
所以 $M(a)=f(1)=3a-1$，$m(a)=f(2)=4$，
所以 $h(a)=M(a)-m(a)=3a-1-4=3a-5$，
所以 $h(a)$在$[2,+\infty)$上的最小值为 $h(2)=1$.

综上，$h(a)$的最小值为$\frac{8}{27}$. ………………………16 分