

仪征中学 2019 年 高考数学全真模拟试卷 四

数学 I

一、填空题（本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分. 不需要写出解答过程，请将答案填写在答题卡相应的位置上.）

1. 已知集合 $A = \{x | |x| < 2\}$, $B = \{-2, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

解析 $\because A = \{x | |x| < 2\} = (-2, 2)$, $B = \{-2, 0, 1, 2\}$, $\therefore A \cap B = \{0, 1\}$.

答案 $\{0, 1\}$

2. 设 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i$, 则 $|z| =$ _____.

解析 法一 因为 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} + 2i = -i + 2i = i$, 所以 $|z| = 1$.

法二 因为 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i = \frac{1-i+2i(1+i)}{1+i} = \frac{-1+i}{1+i}$, 所以 $|z| = \left| \frac{-1+i}{1+i} \right| = \frac{|-1+i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.

答案 1

3. 为强化环保意识, 环保局每周从当地的 5 所化工厂（甲, 乙, 丙, 丁, 戊）中随机抽取 3 所进行污水合格检测, 则在一周抽检中, 甲, 乙化工厂都被抽测的概率是_____.

答案: $\frac{3}{10}$

考点: 古典概型。

解析: 5 所化工厂中随机抽取 3 所, 所有可能为: 甲乙丙, 甲乙丁, 甲乙戊, 甲丙丁, 甲丙戊, 甲丁戊, 乙丙丁, 乙丙戊, 乙丁戊, 丙丁戊, 共 10 种, 甲, 乙化工厂都被抽测的有: 甲乙丙, 甲乙丁, 甲乙戊, 共 3 种, 所以, 所求的概率为: $\frac{3}{10}$

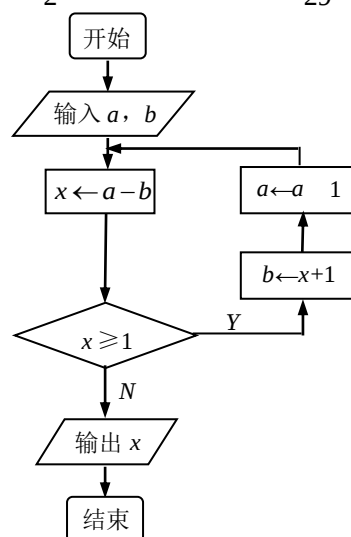
4. 《张丘建算经》卷上第 22 题——“女子织布”问题: 某女子善于织布, 一天比一天织得快, 而且每天增加的数量相同. 已知第一天织布 5 尺, 30 天共织布 390 尺, 则该女子织布每天增加_____尺.

解析 依题意知, 每天的织布数组成等差数列, 设公差为 d , 则 $5 \times 30 + \frac{30 \times 29}{2} d = 390$, 解得 $d = \frac{16}{29}$.

答案 $\frac{16}{29}$ 尺

5. 运行如图所示的流程图, 若输入的 $a = 6, b = 3$,

则输出的 x 的值为_____.



（第 5 题）

答案: 0

解析: $x=3 \Rightarrow a=5, b=3+1=4 \Rightarrow x=1 \Rightarrow a=4, b=2 \Rightarrow x=2 \Rightarrow a=3, b=3 \Rightarrow x=0$.

6 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的一个焦点到一条渐近线的距离为 $3a$, 则该双曲线的渐近线方程为_____.

答案: $y = \pm 3x$

解析: 双曲线的一个焦点到一条渐近线的距离为 $b = 3a$, 所以该双曲线的渐近线的斜率为 $\pm \frac{b}{a} = \pm 3$, 即 $y = \pm 3x$

7 若样本 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的方差是 3, 则样本 $2a_1+3, 2a_2+3, 2a_3+3, 2a_4+3, 2a_5+3$ 的方差是_____.

解析: 若 $\bar{a}$ 表示样本 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的均值, 则样本 $2a_1+3, 2a_2+3, 2a_3+3, 2a_4+3, 2a_5+3$ 的均值为 $2\bar{a}+3$. 又 $\sum_{i=1}^5 (a_i - \bar{a})^2 = 3$, $\therefore \sum_{i=1}^5 [(2a_i+3) - (2\bar{a}+3)]^2 = \sum_{i=1}^5 (2a_i - 2\bar{a})^2 = 12$.

答案: 12

8 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $a=2, \cos A = \frac{1}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

解析 由 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 得 $4 = b^2 + c^2 - \frac{2}{3}bc \geq 2bc - \frac{2}{3}bc = \frac{4}{3}bc$, 所以 $bc \leq 3$, 又 $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 则 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \leq \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$.

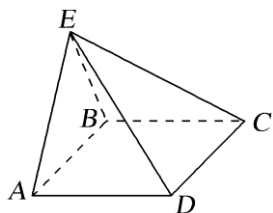
答案 $\sqrt{2}$

9 已知 $\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{3}$, θ 为锐角, 则 $\sin(2\theta + \frac{\pi}{3}) =$ _____.

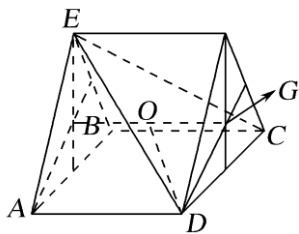
解析 由 $\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{3}$ 可得 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta - \sin \theta) = -\frac{1}{3}$, 则 $\cos \theta - \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, 两边平方可得 $1 - \sin 2\theta = \frac{2}{9}$, $\sin 2\theta = \frac{7}{9}$. 又 θ 是锐角, $\cos \theta < \sin \theta$, 则 $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, $2\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 所以 $\cos 2\theta = -\sqrt{1 - \sin^2 2\theta} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$, 所以 $\sin(2\theta + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta = \frac{7}{18} - \frac{4\sqrt{6}}{9}$.

答案 $\frac{7}{18} - \frac{4\sqrt{6}}{9}$

10. 如图, 已知 $\triangle EAB$ 所在的平面与矩形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直, $EA=EB=3, AD=2, \angle AEB=60^\circ$, 则多面体 $EABCD$ 的外接球的表面积为_____.

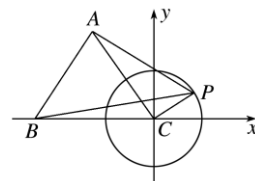
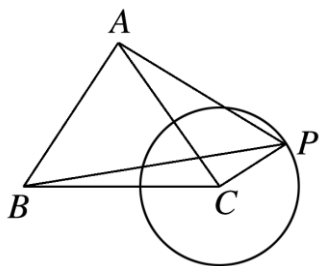


解析 将四棱锥补形成三棱柱, 设球心为 O , 底面重心为 G , 则 $\triangle OGD$ 为直角三角形, $OG=1, DG=\sqrt{3}$, $\therefore R^2=4$, $\therefore$ 多面体 $EABCD$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=16\pi$.



答案 16π

11. 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形, P 是以 C 为圆心, 1 为半径的圆上任意一点, 则 $\vec{AP} \cdot \vec{BP}$ 取得最小值时, $\vec{CP} \cdot \vec{AB} =$ _____.



答案 0

解析 方法一 因为 $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = (\vec{AC} + \vec{CP}) \cdot (\vec{BC} + \vec{CP}) = \vec{AC} \cdot \vec{BC} + \vec{CP} \cdot (\vec{AC} + \vec{BC}) + \vec{CP}^2 = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} + \vec{CP} \cdot (\vec{AC} + \vec{BC}) + 1 = 7 + \vec{CP} \cdot (\vec{AC} + \vec{BC})$, 取 AB 的中点 M , 连接 CM , 所以 $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 7 - 2\vec{CM} \cdot \vec{CP}$, 所以当 $\vec{CM}$ 与 $\vec{CP}$ 同向时, $\vec{AP} \cdot \vec{BP}$ 有最小值 1, 此时 $\vec{CP}$ 与 $\vec{AB}$ 垂直, 所以 $\vec{CP} \cdot \vec{AB} = 0$.

方法二 以 C 为坐标原点, BC 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系, 如图所示,

则 $A(\sqrt{3}, 3)$, $B(2\sqrt{3}, 0)$, 圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 设 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$,

则 $\vec{AP} = (\cos \theta + \sqrt{3}, \sin \theta - 3)$, $\vec{BP} = (\cos \theta + 2\sqrt{3}, \sin \theta)$,

$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = (\cos \theta + \sqrt{3})(\cos \theta + 2\sqrt{3}) + (\sin \theta - 3)\sin \theta = 7 + 3\sqrt{3}\cos \theta - 3\sin \theta = 7 + 6\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$,

所以当 $\theta = \frac{5\pi}{6}$ 时, $\vec{AP} \cdot \vec{BP}$ 有最小值 1, 此时 $\vec{CP} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 又 $\vec{AB} = (\sqrt{3}, -3)$, 所以 $\vec{CP} \cdot \vec{AB} = 0$

12 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 且 $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, 其前 n 项和为 S_n , 若对任意的正整数 n , $S_n + 2n + m \cdot 2^n \geq 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 _____.

答案 $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

解析 由 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ 得 $a_{n+2} - a_{n+1} - 2(a_{n+1} - a_n) = 0$, 得 $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$,

又 $a_2 - a_1 = 3$, $\therefore$ 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是以 3 为首项, 2 为公比的等比数列, $\therefore a_{n+1} - a_n = 3 \times 2^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$),

$\therefore$ 当 $n \geq 2$ 时, $a_n - a_{n-1} = 3 \times 2^{n-2}$, $\dots$, $a_3 - a_2 = 3 \times 2$, $a_2 - a_1 = 3$,

将以上各式累加得 $a_n - a_1 = 3 \times 2^{n-2} + \dots + 3 \times 2 + 3 \times 1 = 3(2^{n-1} - 1)$, $\therefore a_n = 3 \times 2^{n-1} - 2$ (当 $n=1$ 时, 也满足).

$\therefore S_n = 3(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - 2n = 3 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} - 2n = 3 \times 2^n - 2n - 3$

由 $S_n + 2n + m \cdot 2^n \geq 0$ 得 $3 \times 2^n - 2n - 3 + 2n + m \cdot 2^n \geq 0$, $\therefore 3 \times 2^n - 3 + m \cdot 2^n \geq 0$, 即 $m \geq -3 + \frac{3}{2^n}$,

$\therefore \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$, $\therefore m \geq -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$, 故实数 m 的取值范围是 $\left[-\frac{3}{2}, +\infty \right)$.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 和点 $M(1, 0)$ 若在圆 O 上存在点 A , 在圆 $C: (x - \frac{7}{2})^2 + (y + \frac{5\sqrt{3}}{2})^2 = r^2$ ($r > 0$) 上存在点 B , 使得 $\triangle MAB$ 为等边三角形, 则 r 的最大值为_____.

答案: 8

解析: 当 A 点取圆 O 与 x 轴负半轴的交点的时候, r 取得最大值. 此时 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

即 $BC \leq MC + BM = MC + AM = 5 + AM \leq 5 + 3 = 8$

14. 若 x, y, z 均为正实数, 且 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 则 $\frac{(z+1)^2}{2xyz}$ 的最小值为_____.

【答案】 $3 + 2\sqrt{2}$

【解析】

x, y, z 均为正实数, 且 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

可得 $1 - z^2 = x^2 + y^2 \geq 2xy$, 当且仅当 $x = y$ 取得等号,

则 $\frac{(z+1)^2}{2xyz} \geq \frac{(1+z)^2}{z(1-z^2)} = \frac{1+z}{z(1-z)} = \frac{1}{3-(1+z)-\frac{2}{1+z}} \geq \frac{1}{3-2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$,

当且仅当 $z = \sqrt{2} - 1, x = y = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ 时等号成立,

取得最小值 $3 + 2\sqrt{2}$.

二、解答题 (本大题共 6 小题, 共计 90 分. 请在答题纸指定区域内作答, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

15. (本题满分 14 分)

【解析】 (1) $\because f(\alpha) = m \cdot n = -1$,

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2} \cdot (\cos \frac{\alpha}{2} - 1) = -1$, (2 分)

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$, 即 $\sin(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, (4 分)

$\therefore \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}) = \cos[\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2})] = \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}) = -\frac{1}{2}$. (6 分)

(2) 由题意, 得

$f(A) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{A}{4} \cdot 2 \sin \frac{A}{4} + \frac{1}{2} \cdot (\cos \frac{A}{2} - 1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} = \sin(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由 $a \cos B + b \cos A + 2c \cdot \cos C = 0$ 及正弦定理知,

$\sin A \cos B + \sin B \cos A + 2 \sin C \cdot \cos C = 0$, (8 分)

$\therefore \sin(A+B) + 2 \sin(A+B) \cdot \cos C = 0$,

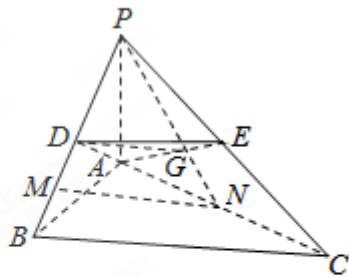
又 $\because \sin(A+B) \neq 0$, $\therefore \cos C = -\frac{1}{2}$, $\because C \in (0, \pi)$, $\therefore C = \frac{2}{3}\pi$, (11 分)

$$\therefore 0 < A < \frac{\pi}{3}, 0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} < \frac{A}{2} + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}, \therefore \sin\left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\therefore \text{函数 } f(A) = \sin\left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \in \left(0, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right). \text{ 即函数 } f(A) \text{ 的取值范围是 } \left(0, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right). \text{ (14 分)}$$

16. (本题满分 14 分)

【解析】(1) 连接 PN , 交 AE 于点 G , 连接 DG , 如图.



在 $\triangle PAC$ 中, PN , AE 都是中线, 则 $\frac{PG}{GN} = \frac{2}{1}$, (2 分)

$\therefore$ 点 D 为 PB 的中点, 点 M 为 DB 的中点,

$$\therefore \frac{PD}{DM} = \frac{2}{1}. \text{ (4 分)}$$

在 $\triangle PMN$ 中, $\therefore \frac{PD}{DM} = \frac{PG}{GN} = \frac{2}{1}, \therefore MN \parallel DG$,

又 $\because MN \not\subset$ 平面 ADE , $DG \subset$ 平面 ADE , $\therefore MN \parallel$ 平面 ADE . (7 分)

(2) 设线段 BC 的中点为 F , 连接 AF , PF , 并交 DE 于点 O , 连接 AO , 如图,

易知点 O 为 PF 的中点.

在正三角形 ABC 中, 点 F 为边 BC 的中点, $\therefore AF = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$.

又 $\because PA = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$, $\therefore$ 在 $\triangle PAF$ 中, $PA = AF$, $\therefore AO \perp PF$. (10 分)

$\because PA \perp$ 平面 ABC , 且 $AC, AB \subset$ 平面 ABC , $\therefore PA \perp AB$, 且 $PA \perp AC$.

又 $\because AB = AC$, $\therefore PB = PC$,

又 $\because$ 点 F 为边 BC 的中点, $\therefore BC \perp PF$. 易知 $DE \parallel BC$, $\therefore DE \perp PF$. (12 分)

又 $\because AO \cap DE = O$, $\therefore PF \perp$ 平面 ADE , 又 $\because PF \subset$ 平面 PBC , $\therefore$ 平面 $ADE \perp$ 平面 PBC . (14 分)

17. (本题满分 14 分)

【解析】(1) 由题意, 设抛物线形 EHF 上点的坐标满足函数 $y = ax^2 + \frac{1}{8} (a > 0)$.

将点 $\left(\pm 2, \frac{17}{8}\right)$ 代入得, $4a + \frac{1}{8} = \frac{17}{8}$,

解得 $a = \frac{1}{2}$, 即 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}$. (2 分)

设点 P 的坐标为 $\left(x_0, \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{8}\right)$, $0 < x_0 \leq 2$, 则 $t = \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{8}$.

$\because y' = x$, $\therefore$ 切线 PG 的斜率为 x_0 , $\therefore PG$ 所在直线的方程为 $y - \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{8} = x_0(x - x_0)$, 即 $y = x_0x - \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{8}$.

令 $y = 0$, 得 $x = \frac{x_0}{2} - \frac{1}{8x_0}$, $\therefore G\left(\frac{x_0}{2} - \frac{1}{8x_0}, 0\right)$. (4 分)

$$\therefore PG^2 = \left(\frac{x_0}{2} - \frac{1}{8x_0} - x_0 \right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{8} \right)^2 = \left(\frac{x_0}{2} + \frac{1}{8x_0} \right)^2 + \left(\frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{8} \right)^2 = \frac{1+x_0^2}{x_0^2} \left(\frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{8} \right)^2,$$

$$\text{由 } t = \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{8} \text{ 得 } x_0^2 = 2t - \frac{1}{4}, \text{ 代入上式得, } PG^2 = \frac{t^2 \left(2t + \frac{3}{4} \right)}{2t - \frac{1}{4}} = \frac{t^2(8t+3)}{8t-1},$$

$$\therefore |PG| \text{ 关于 } t \text{ 的函数解析式为 } f(t) = t\sqrt{\frac{8t+3}{8t-1}}, \text{ (6分)}$$

$$\therefore \text{点 } G \text{ 在边 } AB \text{ 上, 则 } -2 \leq \frac{x_0}{2} - \frac{1}{8x_0} \leq 2,$$

$$\text{解得 } \begin{cases} 0 \leq x_0 \leq 2 + \frac{\sqrt{17}}{2}, \\ x_0 \geq -2 + \frac{\sqrt{17}}{2}, \end{cases}$$

$$\text{即 } -2 + \frac{\sqrt{17}}{2} \leq x_0 \leq 2 + \frac{\sqrt{17}}{2}. \text{ 又 } \because 0 < x_0 \leq 2, \therefore -2 + \frac{\sqrt{17}}{2} \leq x_0 \leq 2, \text{ 由 } t = \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{8} \text{ 得, } \frac{17}{4} - \sqrt{17} \leq t \leq \frac{17}{8},$$

$$\therefore \text{定义域为 } \left\{ t \mid \frac{17}{4} - \sqrt{17} \leq t \leq \frac{17}{8} \right\}. \text{ (8分)}$$

$$(2) \text{ 令 } g(t) = f^2(t) = \frac{2t^3 + \frac{3}{4}t^2}{2t - \frac{1}{4}}, \frac{17}{4} - \sqrt{17} \leq t \leq \frac{17}{8}, \text{ 则 } g'(t) = \frac{t \left(8t^2 - \frac{3}{8} \right)}{\left(2t - \frac{1}{4} \right)^2},$$

$$\text{令 } g'(t) = 0, \text{ 得 } t = \frac{\sqrt{3}}{8}, \text{ (10分)} \quad \text{当 } \frac{17}{4} - \sqrt{17} \leq t < \frac{\sqrt{3}}{8} \text{ 时, } g'(t) < 0; \quad \text{当 } \frac{\sqrt{3}}{8} < t \leq \frac{17}{8} \text{ 时, } g'(t) > 0,$$

$$\text{故当 } t = \frac{\sqrt{3}}{8} \text{ 时, } |PG|^2 \text{ 取得最小值, 即 } |PG| \text{ 取得最小值, 为 } \frac{\sqrt{3}}{8} \times \sqrt{\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-1}} = \frac{\sqrt{3\sqrt{3}+6}}{8},$$

$$\text{又因小路每米造价 } m \text{ 元, 故当 } t = \frac{\sqrt{3}}{8} \text{ (百米) 时小路造价最低,}$$

$$\text{最低造价为 } 100 \times \frac{\sqrt{3\sqrt{3}+6}}{8} m = \frac{25\sqrt{3\sqrt{3}+6}}{2} m \text{ (元)}. \text{ (14分)}$$

18. (本题满分 16 分)

【解析】(1) 根据题意, 可设直线 AP 的方程为 $y = k_{AP}(x-2)$.

直线 BQ 的方程为 $y = k_{BQ}(x+2)$. (2分)

则直线 AP 和 BQ 的交点 R 的横坐标 x_0 满足: $\frac{x_0+2}{x_0-2} = 2$, 即 $x_0 = 6$.

因此直线 AP 和 BQ 的交点 R 在定直线 $x=6$ 上. (4分)

(2) 由 (1), 可设点 R 的坐标为 $(6, m)$, 则直线 AP 的方程为 $y = \frac{m}{4}(x-2)$, 直线 BQ 的方程为 $y = \frac{m}{8}(x+2)$. (5分)

$$\text{联立方程, 得 } \begin{cases} y = \frac{m}{4}(x-2), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } (m^2+12)x^2 - 4m^2x + 4(m^2-12) = 0,$$

$$\text{设 } P(x_p, y_p), \text{ 则根据根与系数的关系, 得 } 2 \times x_p = \frac{4(m^2-12)}{m^2+12}, \text{ 即 } x_p = \frac{2(m^2-12)}{m^2+12},$$

$$\text{代入直线 } AP \text{ 的方程得, } y_p = \frac{12m}{m^2+12},$$

$$\text{故 } P \left(\frac{2(m^2-12)}{m^2+12}, \frac{-12m}{m^2+12} \right). \text{ (7分)}$$

联立方程,得
$$\begin{cases} y = \frac{m}{8}(x+2), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$$
 消去 y 得 $(m^2+48)x^2 + 4m^2x + 4(m^2-48) = 0$,

设 $Q(x_Q, y_Q)$, 则 $-2 \times x_Q = \frac{4(m^2-48)}{m^2+48}$, 即 $x_Q = \frac{2(48-m^2)}{m^2+48}$, 代入直线 BQ 的方程得, $y_Q = \frac{24m}{m^2+48}$,

故 $Q\left(\frac{2(48-m^2)}{m^2+48}, \frac{24m}{m^2+48}\right)$, (9 分)

当 $\frac{2(48-m^2)}{m^2+48} = \frac{2(m^2-12)}{m^2+12}$, 即 $m^2 = 24$ 时, 直线 PQ 与 x 轴的交点为 $T(\frac{2}{3}, 0)$, (10 分)

当 $\frac{2(48-m^2)}{m^2+48} \neq \frac{2(m^2-12)}{m^2+12}$, 即 $m^2 \neq 24$ 时, 下证直线 PQ 过点 $T(\frac{2}{3}, 0)$.

$k_{PT} - k_{QT} = \frac{\frac{-12m}{m^2+12} - 0}{\frac{2(m^2-12)}{m^2+12} - \frac{2}{3}} - \frac{\frac{24m}{m^2+48} - 0}{\frac{2(48-m^2)}{m^2+48} - \frac{2}{3}} = \frac{-9m}{m^2-24} - \frac{9m}{24-m^2} = 0$, 故直线 PQ 过定点 $T(\frac{2}{3}, 0)$. (12 分)

(3) 由题意知, $m \neq 0$, 再结合 (2) 中相关结论知, $S_{\triangle PQB} = \frac{1}{2} \cdot BT \cdot |y_Q - y_P|$, $S_{\triangle PQA} = \frac{1}{2} \cdot AT \cdot |y_Q - y_P|$, (14 分)

故 $\frac{S_{\triangle PQB}}{S_{\triangle PQA}} = \frac{BT}{AT} = \frac{\frac{2}{3} + 2}{2 - \frac{2}{3}} = 2$. (16 分)

19. (本题满分 16 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均不为 0, 其前 n 项和为 S_n . 若 $a_2 = 6$, $S_n^2 = 3n^2 a_n + S_{n-1}^2$, $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_1 的值; (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n = b_n + 3b_{n+1}$, $5b_2 - b_3 = 3$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列.

解: (1) $n=2$ 时, 由 $S_n^2 = 3n^2 a_n + S_{n-1}^2$ 得 $(a_1 + 6)^2 = 12 \times 6 + a_1^2$, 解得 $a_1 = 81$ 2 分

(2) $n \geq 2$ 时, 由 $S_n^2 = 3n^2 a_n + S_{n-1}^2$, 得 $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 3n^2 a_n$, 则 $(S_n - S_{n-1})(S_n + S_{n-1}) = 3n^2 a_n$.

因为 $a_n \neq 0$, 所以 $S_n + S_{n-1} = 3n^2$, ① 4 分

所以 $S_{n+1} + S_n = 3(n+1)^2$, ②

②-①得 $a_{n+1} + a_n = 6n + 3$, $n \geq 2$. 所以 $a_{n+2} + a_{n+1} = 6n + 9$, 两式相减得 $a_{n+2} - a_n = 6$, $n \geq 2$, 6 分

即数列 $a_2, a_4, a_6, \dots$ 及数列 $a_3, a_5, a_7, \dots$ 都成公差为 6 的等差数列. 由 , 得 $a_3 = 9$, 可求得 $a_n = 3n$.

所以数列 的通项公式为 $a_n = 3n$ 8 分

(3) 由 $5b_2 - b_3 = 3$, $a_1 = b_1 + 3b_2 = 3$, 得 $5b_2 - b_3 = b_1 + 3b_2$, 所以 $b_3 - b_2 = b_2 - b_1$ 10 分

因为 $a_n = 3n$, 所以 $b_n + 3b_{n+1} = 3n$. 所以 $b_{n+1} + 3b_{n+2} = 3(n+1)$,

两式相减得 $b_{n+1} + 3b_{n+2} - (b_n + 3b_{n+1}) = 3$, 即 $3b_{n+2} - 2b_{n+1} - b_n = 3$, 12 分

所以 $3b_{n+1} - 2b_n - b_{n-1} = 3(n \geq 2)$, 两式相减得 $3b_{n+2} - 5b_{n+1} + b_n + b_{n-1} = 0 (n \geq 2)$,

所以 $3(b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n) + b_{n+1} - 2b_n + b_{n-1} = 0 (n \geq 2)$, 14 分

因为 $b_3 - 2b_2 + b_1 = 0$, 可得 $b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n = 0$, 所以 $b_{n+2} - b_{n+1} = b_{n+1} - b_n$. 所以数列 是等差数列. ... 16 分

20. (本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = (x-1)e^x$, $g(x) = mx^2 - kx$, 其中 $m \in \mathbf{R}$ 且 $m \neq 0$, $k \in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的极值点 (极值点是指函数取极值时对应的自变量的值), 求 k 的值;

(2) 当 $m > 0$, $k = 0$ 时, 求证: 函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 有两个不同的零点;

(3) 若 $m = 1$, 记函数 $h(x) = \frac{f'(x)}{e^{2x}} + \frac{g(x)+1}{e^x}$, 若 $\exists a, b, c \in [0, 1]$, 使 $h(a) + h(b) < h(c)$, 求 k 的取值范围.

解: (1) 因为 $f(x) = (x-1)e^x$, 所以 $f'(x) = xe^x$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调递增, 所以 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极值点. 因为 $g(x) = mx^2 - kx$, $m \neq 0$, 所以函数 $g(x)$ 的极值点为 $x = \frac{k}{2m}$,

因为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的极值点, 所以 $x = \frac{k}{2m} = 0$, 所以 $k = 0$ 2 分

(2) 由题意 $F(x) = mx^2 + (x-1)e^x$, 所以 $F'(x) = 2mx + xe^x = x(2m + e^x)$,

因为 $m > 0$, 所以 $2m + e^x > 0$, 令 $F'(x) = 0$, 得 $x = 0$.

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $F'(x) < 0$, 则 $F(x)$ 单调递减; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$, 则 $F(x)$ 单调递增; 所以 $x = 0$ 为 $F(x)$ 的极值点. 因为 $F(0) = -1 < 0$, $F(1) = m > 0$, 又 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续且单调, 所以 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点. 4 分

取 x_0 满足 $x_0 < -2$ 且 $x_0 < \ln m$, 则 $F(x_0) = mx_0^2 + (x_0 - 1)e^{x_0} > mx_0^2 + m(x_0 - 1) = m(x_0^2 + x_0 - 1)$

因为 $x_0 < -2$ 且 $x_0 < \ln m$, 所以 $m(x_0^2 + x_0 - 1) > 0$. 所以 $F(x_0) > 0$, 又 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上连续且单调, 所以 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有唯一零点.

综上, 函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 有两个不同的零点. 8 分

(3) $m = 1$ 时, $h(x) = \frac{f'(x)}{e^{2x}} + \frac{g(x)+1}{e^x} = \frac{x^2 + (1-k)x + 1}{e^x}$,

由 $\exists a, b, c \in [0, 1]$, 使 $h(a) + h(b) < h(c)$, 则有 $2[h(x)]_{\max} < [h(x)]_{\min}$.

由于 $h'(x) = \frac{-(x-k)(x-1)}{e^x}$,

① 当 $k \geq 1$ 时, $h'(x) \leq 0$, $h(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 所以 $2h(1) < h(0)$, 即 $2 \cdot \frac{3-k}{e} < 1$, 得 $k > 3 - \frac{e}{2}$.

② 当 $k \leq 0$ 时, $h'(x) \geq 0$, $h(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,

所以 $2h(0) < h(1)$ 即 $2 < \frac{3-k}{e}$, 得 $k < 3 - 2e$12 分

③ 当 $0 < k < 1$ 时, 在 $x \in [0, k)$ 上, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $[0, k)$ 上单调递减, 在 $x \in (k, 1]$ 上, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(k, 1]$ 上单调递增, 所以 $2h(t) < \max\{h(0), h(1)\}$, 即 $2 \times \frac{k+1}{e^k} < \max\left\{1, \frac{3-t}{e}\right\}$. (*),

易知 $y = \frac{k+1}{e^k}$ 在 $k \in [0, 1]$ 上单调递减, 故 $2 \times \frac{k+1}{e^k} \geq \frac{4}{e}$, 而 $\frac{3-t}{e} < \frac{3}{e}$, 所以不等式 (*) 无解.

综上, 实数 k 的取值范围为 $\{k | k > 3 - \frac{e}{2} \text{ 或 } k < 3 - 2e\}$16 分

班级_____ 学号_____ 姓名_____ 得分_____

仪征中学 2019 年 高考 数学 全真 模拟 试卷 四
数学 II （理科附加题）

21. A. [选修 4-2: 矩阵与变换] (本小题满分 10 分)

1. 已知二阶矩阵 M 有特征值 $\lambda=8$ 及对应的一个特征向量 $e_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 并且矩阵 M 对应的变换将点 $(-1, 2)$ 变换成点 $(-2, 4)$.

(1) 求矩阵 M ;

(2) 求矩阵 M 的另一个特征值.

解析: 设 $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $M\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=8\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix}$, $M\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a+2b \\ -c+2d \end{bmatrix}$,

$$\begin{cases} a+b=8, \\ c+d=8, \\ -a+2b=-2, \\ -c+2d=4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=6, \\ b=2, \\ c=4, \\ d=4, \end{cases} \text{ 即 } M=\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 令特征多项式 $f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-6 & -2 \\ -4 & \lambda-4 \end{vmatrix}=(\lambda-6) \cdot (\lambda-4)-8=0$, 解得 $\lambda_1=8, \lambda_2=2$,

所以矩阵 M 的另一个特征值为 2. 10 分

B. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (本小题满分 10 分)

求曲线 $C: \begin{cases} x=\frac{2}{t^2+1}, \\ y=\frac{2t}{t^2+1} \end{cases}$ (t 为参数) 被直线 $l: \begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}u, \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}u \end{cases}$ (u 为参数) 所截得的线段 AB 的长.

解: 由 $\begin{cases} x=\frac{2}{t^2+1}, & \text{①} \\ y=\frac{2t}{t^2+1}, & \text{②} \end{cases}$ $\frac{\text{②}}{\text{①}}$ 得 $t=\frac{y}{x}$, 代入①, 化简得 $x^2+y^2=2x$.

又 $x=\frac{2}{t^2+1} \neq 0$, 所以曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=1$ ($x \neq 0$). 4 分

将直线 $l: \begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}u, \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}u \end{cases}$ 化为普通方程为 $y=x-\frac{1}{2}$ 6 分

圆 C 的圆心到直线 $l: y=x-\frac{1}{2}$ 的距离 $d=\frac{\left|1-0-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$. 所以所求弦长为 $2\sqrt{1-d^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$10 分

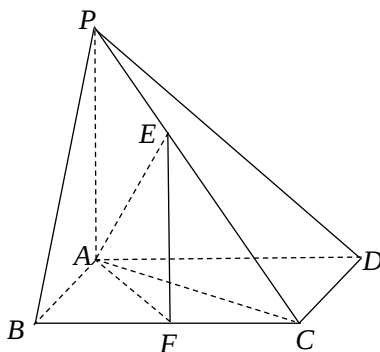
【必做题】

22. (本小题满分 10 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面四边形 $ABCD$ 为矩形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AD = 2AB = 2$, F 为 BC 的中点, $\overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{EC}$.

(1) 若 $\lambda = 2$, 求异面直线 PD 与 EF 所成角的余弦值;

(2) 若 $\lambda = \frac{1}{2}$, 求二面角 $E-AF-C$ 的余弦值.



(第 22 题)

解: 以 A 为原点, $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}\}$ 为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.

则 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(0, 2, 0)$, $P(0, 0, 2)$, $F(1, 1, 0)$.

(1) 当 $\lambda = 2$ 时, 由 $\overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{EC}$ 得 $E(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, 所以 $\overrightarrow{EF} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, 又 $\overrightarrow{PD} = (0, 2, -2)$,

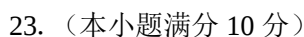
所以 $\cos \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{PD} \rangle = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{PD}|} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. 所以异面直线 PD 与 EF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 5 分

(2) 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 由 $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EC}$, 得 $E(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$. 设平面 AEF 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (1, y, z)$, 又 $\overrightarrow{AE} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$,

$\overrightarrow{AF} = (1, 1, 0)$, 则 $\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AF} = 0, \end{cases}$ 得 $\vec{n}_1 = (1, -1, \frac{1}{4})$.

又平面 AFC 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$, 所以 $\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{33}}{33}$.

所以二面角 $E-AF-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{33}}{33}$10 分



(1) 若点 F 到直线 l 的距离为 $\sqrt{3}$, 求直线 l 的斜率;

解析：(1) 由已知， $x=4$ 不符合题意，故设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$ ，

因为点 F 到直线 l 的距离为 $\sqrt{3}$, 所以 $\frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{3}$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. 所以直线 l 的斜率为 $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$4 分

(2) 设线段 AB 中点的坐标为 $N(x_0, y_0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

因为 AB 不垂直于 x 轴，所以直线 MN 的斜率为 $\frac{y_0}{x_0-4}$ ，所以直线 AB 的斜率为 $\frac{4-x_0}{y_0}$ ，

所以直线 AB 的方程为 $y - y_0 = \frac{4 - x_0}{y_0} (x - x_0)$, 联立 $\begin{cases} y - y_0 = \frac{4 - x_0}{y_0} (x - x_0), \\ y^2 = 4x, \end{cases}$

消去 x 得 $\left(1-\frac{x_0}{4}\right)y^2-y_0y+y_0^2+x_0(x_0-4)=0$, 所以 $y_1+y_2=\frac{4y_0}{4-x_0}$.

因为 N 为 AB 的中点, 所以 $\frac{y_1+y_2}{2}=y_0$, 即 $\frac{2y_0}{4-x_0}=y_0$, 所以 $x_0=2$, 即线段 AB 中点的横坐标为定值

2.10 分