探源双变量的“任意性与存在性”问题

周思宇
湖南省长沙市周南中学 410005

[摘　要] 与双变量有关的“任意性与存在性”问题是高考常考的内容，常以不等式和等式为工具进行考查，破解该问题的关键是在于将含有全称量词或存在量词的问题转化为两个函数值域(或最值)之间的问题. 文章对双变量问题进行了系统梳理.

[关键词] 分离常数；值域；恒成立

在正式讲解双变量问题之前，先给出如下两个引理，便于我们证明文中的命题.

引理1：(1) $\forall x\in M$，使得$a\geqslant f(x)$恒成立$\Leftrightarrow a\geqslant f(x)_{\max}$.

(2) $\forall x\in M$，使得$a\leqslant f(x)$恒成立$\Leftrightarrow a\leqslant f(x)_{\min}$.

引理2：(1) $\exists x\in M$，使得$a\geqslant f(x)$成立$\Leftrightarrow a\geqslant f(x)_{\min}$.

(2) $\exists x\in M$，使得$a\leqslant f(x)$成立$\Leftrightarrow a\leqslant f(x)_{\max}$.

若将本文所有命题(含引理)中的“≤”和“≥”分别改为“<”和“>”结论依然成立. 现结合以上两个引理，对双变量的“任意性与存在性”问题做出如下归纳.

“任意≤(或≥)存在”型问题

命题1-1：$\forall x_1\in A$，$\exists x_2\in B$，使得$f(x_1)\leqslant g(x_2)\Leftrightarrow f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\max}$.

证明：第1步将x_1视为变量(此时x_2被视为常量)，则$g(x_2)$为常量，根据引理1(1)知$\forall x_1\in A$，$\exists x_2\in B$，使得$f(x_1)\leqslant g(x_2)\Leftrightarrow g(x_2)\geqslant f(x)_{\max}$.

第2步将x_2视为变量，此时$f(x)_{\max}$为常量，根据引理2(2)知$g(x_2)\geqslant f(x)_{\max}\Leftrightarrow f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\max}$.

所以$\forall x_1\in A$，$\exists x_2\in B$，使得$f(x_1)\leqslant g(x_2)\Leftrightarrow f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\max}$.

小结：命题1的证明巧妙地借用了引理1和引理2的结论，第1步的$g(x_2)$与第2步的$f(x)_{\max}$实际上就是引理中的常数a.

命题1-2：$\forall x_1\in A$，$\exists x_2\in B$，使得$f(x_1)\geqslant g(x_2)\Leftrightarrow f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\min}$.

证明：与命题1-1同理.

例1：已知函数$f(x)=x+\dfrac{4}{x}$，$g(x)=2^x+a$，若$\forall x_1\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，$\exists x_2\in[2,3]$，使得$f(x_1)\leqslant g(x_2)$，则实数$a$的取值范围是____.

解析：由命题1-1知$f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\max}$，由于$f(x)_{\max}=\dfrac{17}{2}$，$g(x)_{\max}=8+a$，

所以$\dfrac{17}{2}\leqslant 8+a$，即$a\geqslant\dfrac{1}{2}$，故答案为$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

“任意≤(或≥)任意”型问题

命题2-1：$\forall x_1\in A$，$\forall x_2\in B$，使得$f(x_1)\leqslant g(x_2)\Leftrightarrow f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\min}$.

证明：第1步将x_1视为变量(此时x_2被视为常量)，则$g(x_2)$为常量，根据引理1(1)知$\forall x_1\in A$，$\forall x_2\in B$，使得$f(x_1)\leqslant g(x_2)\Leftrightarrow g(x_2)\geqslant f(x)_{\max}$.

第2步将x_2视为变量，此时$f(x)_{\max}$为常量，根据引理1(2)知$g(x_2)\geqslant f(x)_{\max}\Leftrightarrow f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\min}$.

所以$\forall x_1\in A$，$\forall x_2\in B$，使得$f(x_1)\leqslant g(x_2)\Leftrightarrow f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\min}$.

作者简介：周思宇(1993-)，陕西师范大学教育硕士研究生毕业，主要从事高中数学教学、初等数学解题研究.

命题2-2：$\forall x_1\in A$，$\forall x_2\in B$，使得$f(x_1)\geqslant g(x_2)\Leftrightarrow f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\max}$.

证明：与命题2-1同理.

例2：已知函数$f(x)=x+\dfrac{a^2}{x}(a>0)$，$g(x)=x+\ln x$，若$\forall x_1,x_2\in[1,\mathrm{e}]$，都有$f(x_1)\geqslant g(x_2)$，则实数$a$的取值范围为___.

解析：由命题2-2知原命题等价于$f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\max}$，由于当$x\in[1,\mathrm{e}]$时，$g'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$，故$g(x)$在$[1,\mathrm{e}]$上单调递增，即$g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\mathrm{e}+1$. 现只需证$f(x)\geqslant \mathrm{e}+1$，即$x+\dfrac{a^2}{x}\geqslant \mathrm{e}+1\Leftrightarrow a^2\geqslant(\mathrm{e}+1)x-x^2$在$[1,\mathrm{e}]$上恒成立.

令$h(x)=(\mathrm{e}+1)x-x^2$，$h(x)$在$[1,\mathrm{e}]$上的最大值为$h\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}\right)=\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}\right)^2$.

由引理1(1)知$a^2\geqslant h(x)\Leftrightarrow a^2\geqslant h(x)_{\max}$，故$a^2\geqslant\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}\right)^2$，即$a\geqslant\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}$.

实数a的取值范围为$\left[\dfrac{\mathrm{e}+1}{2},+\infty\right)$.

小结：本例中由于$f(x)$的最小值不易求得，故将$f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\max}$转化为$f(x)\geqslant g(x)_{\max}$，然后利用分离常数法求解，这里避免了对函数$f(x)$的讨论.

“存在≤（或≥）存在”型问题

命题3-1：$\exists x_1\in A$，$\exists x_2\in B$，使得$f(x_1)\leqslant g(x_2)\Leftrightarrow f(x)_{\min}\leqslant g(x)_{\max}$.

证明：略.

命题3-2：$\exists x_1\in A$，$\exists x_2\in B$，使得$f(x_1)\geqslant g(x_2)\Leftrightarrow f(x)_{\max}\geqslant g(x)_{\min}$.

证明：略.

例3：设$a\geqslant1$，已知函数$f(x)=4\ln x-ax+\dfrac{a+3}{x}$，$g(x)=2\mathrm{e}^x-4x+2a$，若$\exists x_1,x_2\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，使得$f(x_1)>g(x_2)$，实数$a$的取值为________.（e为自然数的底数）

解析：由命题3-2知原命题等价于$f(x)_{\max}>g(x)_{\min}$，$f'(x)=\dfrac{4}{x}-a-\dfrac{a+3}{x^2}=\dfrac{-ax^2+4x-(a+3)}{x^2}(x\geqslant0)$. 令$h(x)=-ax^2+4x-(a+3)$，当$a\geqslant1$时，$\Delta\leqslant0$，故$h(x)\leqslant0$，即$f(x)$在定义域内单调递减，故$f(x)$在$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$上的最大值为$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-4\ln2+\dfrac{3}{2}a+6$.

$g'(x)=2\mathrm{e}^x-4$，令$g(x)=0$，得$x=\ln2$.

所以当$x\in\left[\dfrac{1}{2},\ln2\right)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；当$x\in(\ln2,2]$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增.

所以$g(x)$在$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$上的最小值为$g(\ln2)=4-4\ln2+2a$.

由题知$-4\ln2+\dfrac{3}{2}a+6>4-4\ln2+2a$，解得$a<4$，故答案为$[1,4)$.

“任意=存在”型问题

命题4-1：$\forall x_1\in A$，$\exists x_2\in B$，使得$g(x_2)=f(x_1)\Leftrightarrow D_1\subseteq D_2$（$D_1$，$D_2$分别为函数$f(x)$和$g(x)$的值域，下同）.

证明：略.

例4：已知函数$f(x)=x^3+(1-a)x^2-a(a+2)x$，$g(x)=\dfrac{19}{6}x-\dfrac{1}{3}$，$\forall x_1\in[-1,1]$，$\exists x_2\in[0,2]$，使得$f'(x_1)+2ax_1=g(x_2)$成立，则实数$a$的取值范围为________.

解析：令$h(x)=f'(x)+2ax=3x^2+2x-a(a+2)$，则$h'(x)=6x+2$，由$h'(x)=0$得$x=-\dfrac{1}{3}$. 故当$x\in\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right)$时，$h(x)$单调递减；当$x\in\left(-\dfrac{1}{3},1\right]$时，$h(x)$单调递增.

所以$h(x)_{\min}=h\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-a^2-2a-\dfrac{1}{3}$.

又$g(x)$在$[0,2]$上的值域为$\left[-\dfrac{1}{3},6\right]$，

由命题4-1知，$h(x)$的值域是$\left[-\dfrac{1}{3},6\right]$的子集，故$\begin{cases}h(-1)\leqslant6,\\-a^2-2a-\dfrac{1}{3}\geqslant-\dfrac{1}{3},\\h(1)\leqslant6,\end{cases}$解得$-2\leqslant a\leqslant0$，故$a$的取值范围为$[-2,0]$.

“存在=存在”型问题

命题5-1：$\exists x_1\in A$，$\exists x_2\in B$，使得$g(x_2)=f(x_1)\Leftrightarrow D_1\cap D_2\neq\varnothing$.

证明：略.

例5：已知函数$f(x)=x^2-\dfrac{2}{3}ax^3(a>0$，$x\in\mathbf{R})$，$g(x)=\dfrac{1}{x^2(1-x)}$，$\exists x_1\in(-\infty,-1]$，$\exists x_2\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$，使得$f(x_1)=g(x_2)$，则实数$a$的取值范围为________.

解析：$f'(x)=2x-2ax^2=2x(1-ax)$，令$f'(x)=0$，得$x=0$或$x=\dfrac{1}{a}$，由于$a>0$，

故$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$，即$x\in(-\infty,-1]$时，$f(x)$单调递减.

所以$f(x)$在$(-\infty,-1]$上的值域为$\left[1+\dfrac{2}{3}a,+\infty\right)$.

又$g'(x)=\dfrac{3x-2}{x^3(1-x)^2}$，故当$x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$时，$g(x)$单调递增，即$g(x)$在$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$上的值域为$\left(0,\dfrac{8}{3}\right)$.

由命题5-1知$1+\dfrac{2a}{3}<\dfrac{8}{3}$，解得$0<a<\dfrac{5}{2}$，故$a$的取值范围为$\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$.

“任意=任意”型问题

命题6-1：$\forall x_1\in A$，$\forall x_2\in B$，使得$g(x_2)=f(x_1)\Leftrightarrow D_1=D_2$.

证明：略

有关双变量“任意性与存在性”的问题还有很多，本文所谈到的只是冰山一角，要想对该问题有更深入的了解，需要读者再去深入挖掘.