

对解释“频率/组距”的合理性的肤浅思考

王克亮

(江苏省射阳县教育局教研室, 224300)

1 引子

文[1]第二章第 2.2.2 节《频率分布直方图与折线图》这节内容中,介绍了“频数条形图、频率分布直方图、频率折线图、总体分布的密度曲线”这四种体现数据分布规律的图形.在第一种图形“频数条形图”的制作中,我们用纵轴来表示频数,即用小长方形的高来反映对应频数的多少,这一点既直观又形象,学生非常容易接受.类比于此,在制作频率分布直方图时,用纵轴表示频率似乎是很自然的事,可事实上我们是用纵轴来表示的频率/组距的,对于这种“不合常理”的做法,如何解释其合理性?

在笔者最近听的三节课上,第一位老师对这一点未作任何解释,直接教给学生这样做;第二位老师解释说因为所得数据与分组情况有关,所以通常用纵轴来表示频率/组距;第三位老师提到通过后面的学习,我们将会逐步清楚用纵轴来表示频率/组距的优越性.很明显,第一位老师采用了“灌输式”的教学方式;第二位老师“蜻蜓点水”式的解释也难以让人信服;而第三位老师的做法虽未尝不可,但多少有点堵塞过关、“开空头支票”的感觉.可以说,这三种处理方法都在学生的脑海中留下了一个疙瘩.那么,在本节课的教学中应该如何做好这个问题的解释工作,这激发了笔者的思考.

2 教材的处理及教参的建议

2.1 教材的处理

以下内容节选自文[1]第二章第 2.2.2 节,略有改动.

我们可以利用直方图反映样本的频率分布规律,这样的直方图称为频率分布直方图,简称频率直

方图.下面利用一个例子的数据加以说明.

例 从某校高一年级的 1002 名新生中用系统抽样的方法抽取一个容量为 100 的身高样本,数据如表 1 所示(单位:cm),试画出其频率分布直方图.

表 1

168	165	171	167	170	165	170	152	175	174
165	170	168	169	171	166	164	155	164	158
170	155	166	158	155	160	160	164	156	162
160	170	168	164	174	171	165	179	163	172
180	174	173	159	163	172	167	160	164	169
151	168	158	168	176	155	165	165	169	162
177	158	175	165	169	151	163	166	163	167
178	165	158	170	169	159	155	163	153	155
167	163	164	158	168	167	161	162	167	168
161	165	174	156	167	166	162	161	164	166

表 2

分组	频数累计	频数	频率
[150.5,153.5)	4	4	0.04
[153.5,156.5)	12	8	0.08
[156.5,159.5)	20	8	0.08
[159.5,162.5)	31	11	0.11
[162.5,165.5)	53	22	0.22
[165.5,168.5)	72	19	0.19
[168.5,171.5)	86	14	0.14

[171.5, 174.5]	93	7	0.07
[174.5, 177.5]	97	4	0.04
[177.5, 180.5]	100	3	0.03
合计		100	1

解 (1) 先制作频率分布表, 该组数据中最小值为 151, 最大值为 180, 故可取区间 $[150.5, 180.5]$, 现以组距 3 将该区间分成 10 个小组, 得到的频率分布表如表 2 所示. 然后作直角坐标系, 以横轴表示身高, 纵轴表示频率/组距;

(2) 在横轴上标上 150.5, 153.5, 156.5, ..., 180.5 表示的点 (为方便起见, 起始点 150.5 可适当前移);

(3) 在上面标出的各点中, 分别以连结相邻两点的线段为底作矩形, 高等于该组的频率/组距.

至此, 就得到了这组数据的频率分布直方图, 如图 3 所示 (见下页).

一般地, 作频率直方图的方法为: 把横轴分成若干段, 每一线段对应一个组的组距, 然后以此线段为底作一矩形, 它的高等于该组的频率/组距, 这样得出一系列的矩形, 每个矩形的面积恰好是该组上的频率. 这些矩形就构成了频率分布直方图.

2.2 教参的建议

以下内容摘自文[2]第 64 页的边注.

上例的教学, 学生很自然的想法是以纵轴表示频率, 教师应肯定学生的想法, 并按此想法操作, 然后向学生说明这样做虽然直观和容易理解, 但为了与后续学习内容中的密度曲线、正态分布曲线等衔接, 通常用纵轴表示频率/组距, 在以后的学习中可充分体现其优点. 这样做, 既保护了学生的积极性, 也激发了学生对数学的好奇心.

2.3 两者的分析

显然, 教材对这一知识的处理是介绍性的, 教师从中找不到分析的依据. 而教参虽给出了教学建议, 但也未给出分析性的原理. 事实上, 在新课标中, 已删去了正态分布这部分知识; 而在讲密度曲线时, 因为缺少前面必要的分析, 所以也不能解释清楚其中的道理. 这样, 基于后续学习来感悟此道理的做法事实上是不现实的.

3 对解释“频率/组距”的合理性的思考

笔者认为在这节课上完全可以给学生一个相对圆满的答案, 具体地, 我们可先后三次从不同的角度来加以解释.

3.1 知识建构中——从不同分组的可比性角度来解释

在建构频率分布直方图这一知识时, 我们宜采纳教参的建议, 通过不同的分组情况来揭示用纵轴表示频率/组距的合理性. 具体地, 在给出引例后, 可进行如下的讨论:

(1) 分别以组距 3 和组距 6 将区间 $[150.5, 180.5]$ 分成 10 个组和 5 个组, 作出相应的“身高——频率”图 (如图 1 和图 2 所示), 试比较两图发生的变化.

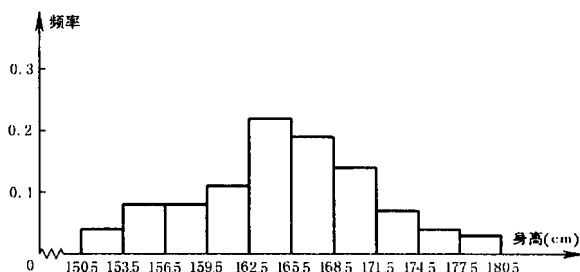


图 1

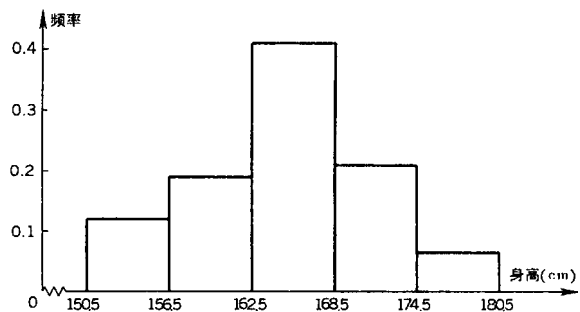


图 2

简析: 当组距从 3 变到 6 时, 对应的频率分布表如表 3 所示. 因为表 3 中每组内的频数等于表 2 中对应两个小组内的频数之和, 所以图 2 中每个组内小长方形的高度值恰好是图 1 中对应两个小组内小长方形的高度值之和, 因而其高度发生了明显的变化. 即小长方形的高度与分组组距的关系是: 随着组距的缩小, 小长方形的高度将会变矮.

表 3

分组	频数累计	频数	频率
[150.5, 156.5)	12	12	0.12
[156.5, 162.5)	31	19	0.19
[162.5, 168.5)	72	41	0.41
[168.5, 174.5)	93	21	0.21
[174.5, 180.5)	100	7	0.07
合计		100	1

从而,依据这样的方法来作图,图形与分组的相关性较大,缺少相对的稳定性.

(2) 为了克服上述不足,受“平均思想”的启发,我们将纵轴表示的量换成频率/组距,仍按上述两种分组方法,作出相应的“身高——频率/组距”图(如图 3 和图 4 所示),再比较两图发生的变化.

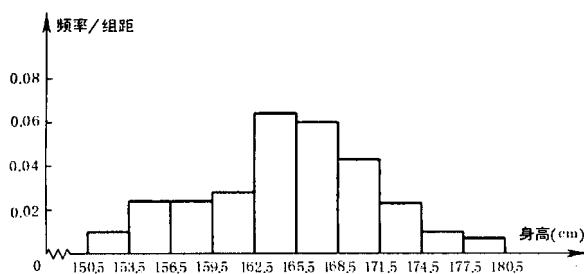


图 3

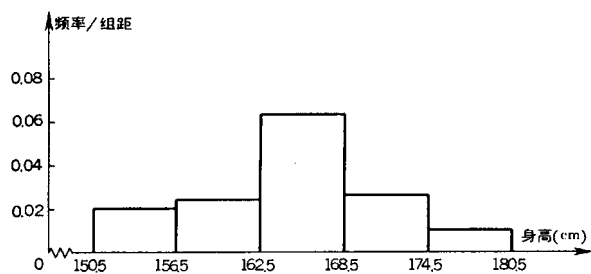


图 4

简析:当组距从 3 变到 6 时,后者每个组内小长方形的高度值恰好是前者对应两个小组内小长方形的高度值的平均值,因而其高度相对稳定.即小长方形的高度与分组的组距的关系是:随着组距的缩小,小长方形的高度将会在原高度的附近略有升降,且逐步细微化.

从而,依据这样的方法来作图,图形与分组的相关性较小,且组距的缩小能反映其变化趋势.

综上所述,在频率分布直方图中用纵轴表示频率/组距是有道理的.

3.2 知识理解中——从直方图的意义与功能角度来解释

文[1]指出:在频率分布直方图中,每个矩形的面积恰好是该组上的频率.在理解这一点时,我们也可顺提用纵轴表示频率/组距的合理性,具体如下:

一方面,因为各个小长方形的宽均相等(都等于组距),所以它们的高与面积成正比,因而每个小长方形的高即可反映该组内频率的大小;另一方面,因为所有的小长方形的面积之和为 1,所以每个小长方形的面积还能折射出该组内的样本数在整个大样本中所占的份额.这样,在频率直方图中用纵轴表示频率/组距不仅合理,而且还有优越性.

3.3 知识延伸中——从作密度曲线的可能性角度来解释

文[1]又提到:如果将频率分布直方图中各相邻的矩形的上底边中点顺次连结起来,就得到频率分布折线图.如果将样本容量取得足够大,分组的组距足够小,那么相应的频率折线图将趋于一条光滑曲线,我们称这条光滑曲线为总体分布的密度曲线.在这知识延伸中,我们可进一步阐述用纵轴表示频率/组距的优越性,具体如下:

由解释 1 的分析知道,在直方图中用纵轴表示频率/组距时,图形相对稳定,且随着组距的缩小而逐步细微化.这样,当组距变得足够小时,频率分布折线能趋于光滑,从而才能得到密度曲线;若用纵轴表示频率,组距每变化一下,相应的小长方形的高都会发生改变,从而频率分布折线图也随之改变,这样一来将因图形的不稳定性而得不到密度曲线.

至此,在频率直方图中用纵轴表示频率/组距的优越性也就情理之中了.

参考文献:

- [1] 单墀,李善良等.普通高中课程标准实验教科书数学(必修 3),江苏教育出版社,2008,12.
- [2] 单墀,李善良等.配苏教版普通高中课程标准实验教科书高中数学教学参考书(必修 3),江苏教育出版社,2008,12.

(收稿日期:2010-09-07)