

函数的零点研究(一)

——与零点有关的填空题

【真题感悟】

1. (2019·全国Ⅲ)函数 $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ 在 $[0, 2\pi]$ 的零点个数为_____.
2. (2018·浙江改编)已知 $\lambda \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x-4, & x \geq \lambda, \\ x^2-4x+3, & x < \lambda. \end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则 λ 的取值范围是_____.
3. (2018·新课标Ⅰ改编)已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = f(x) + x + a$, 若函数 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则 a 的取值范围是_____.
4. (2014·江苏)已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 3 的函数, 当 $x \in [0, 3)$ 时, $f(x) = \left| x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right|$, 若函数 $y = f(x) - a$ 在区间 $[-3, 4]$ 上有 10 个零点(互不相同), 则实数 a 的取值范围是_____.

【典题导引】

例 1 (2017·无锡一模)若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} - 1, & x < 1, \\ \frac{\ln x}{x^2}, & x \geq 1, \end{cases}$ 则函数 $y = |f(x)| - \frac{1}{8}$ 的零点个数为_____.

【变式跟踪】

1. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0 \\ 2x - 6 + \ln x, & x > 0 \end{cases}$ 的零点个数是_____.
 2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & x > 2 \end{cases}$, 函数 $g(x) = 3 - f(2-x)$, 则函数 $y = f(x) - g(x)$ 的零点的个数为_____.
- 例 2 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 + m, & 0 \leq x \leq 1, \\ mx + 5, & x > 1. \end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 有且只有两个零点, 则实数 m 的取值范围为_____.

【变式跟踪】

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 1, \\ -x^2 - x + 1, & x \leq 1. \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}a - 1$ 有三个零点, 则实数 a 的取值范围为_____.
2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq a, \\ x^3 - 3x, & x < a. \end{cases}$ 若函数 $g(x) = 2f(x) - ax$ 恰有 2 个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

例3 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0, \\ 3^{|x-2|} + a, & x > 0. \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - x$ 至少有两个不同的零点, 则实数 a 的最大值为_____.

【变式跟踪】

1. (2019 天津) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = -\frac{1}{4}x + a, a \in \mathbf{R}$ 恰

有两个互异的实数解, 则 a 的取值范围为_____.

例4 (2017 · 全国Ⅲ) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + a(e^{x-1} + e^{-x+1})$ 有唯一零点, 则 $a =$ _____.

【变式跟踪】

1. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上最小正周期为 2 的周期函数, 且当 $0 \leq x < 2$ 时, $f(x) = x^3 - x$, 则函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, 6]$ 上的零点个数为_____.

【课堂反馈】

1. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{a}{x} - 4, & x < 0, \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$ 的图象上存在关于原点对称的点, 则实数 a 的取值范围是_____.

2. (2018 · 南通三模) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax - 1, & x \leq 0, \\ x^3 - ax + |x - 2|, & x > 0 \end{cases}$ 的图象恰好经过三个象限, 则实数 a 的取值范围是_____.