

论学生思维参与的数学公式教学^①

——以“三角恒等变换”起始课为例

伍春兰¹ 许文军²

(1. 北京教育学院 100120 ; 2. 北京市第五中学 100007)

1 问题提出

数学公式背后隐藏着丰富的教育资源,适度的挖掘和利用,可达成更高的教育功能. 然而课堂观察发现,很多数学教师习惯于淡化公式的来源,简化公式的推导,重视公式的结构(记忆)和应用(解题). 仅靠规模化地知识应用(解题)的学习方式,于高考应试而言是高效的,但就思维训练来说则是欠缺的. 此种现象,主客观的因素都有. 客观上高中三年知识两年赶完一年复习(甚至更长),造成了新授课时的紧张. 主观上,原因有三:教学观念偏差,系统设计不足,教材开采不够.

下面以高中“三角函数恒等变换”起始课为例,探讨如何系统设计,创设学生更多思维参与的教学活动.

2 系统设计

三角恒等变换,按照《普通高中数学课程标准(2017 年版)》(以下简称《标准》),包括和角、差角、倍角的三角函数(正弦、余弦、正切)公式,以及积化和差、和差化积、半角公式. 虽然后三组公式并不要求记忆,但六组公式,与之前学习的三角函数概念、两组公式(诱导公式、同角三角函数基本关系式)交织,成为了不少学生学习三角函数的噩梦. 面对公式众、变换(角、名称、升降幂等)广、联系密的学习内容,创设学生思维参与的构建知识网的活动才是王道.

2.1 “诱导”引入

现行普通高中数学人民教育出版社 A 版(以下简称人教 A 版)、人民教育出版社 B 版(以下简称人教 B 版),北京师范大学出版社(以下简称北

师大版)教科书,关于三角恒等变换,从内容顺序,到章/节头导言和情境,差异显见(表 1). 与生活、社会有关的情境有益于学生应用意识的培养,但从承前启后的视角,我们更赞同人教 A 版的导言. 因为和、差角公式的认知起点是诱导公式,依从特殊到一般的思想,学生能自然进入和、差角公式的探究. 这样的引入,既经历了推理思考,也为学生形成三角函数公式的逻辑结构奠定良好的基础. 当然,现实情境与数学情境共进则是更妙的选择.

表 1 各版教科书三角恒等变换章/节头导言和情境

版本 章节	导言概述	情境
人民 A 版 必修第一册第五章 三角函数 5.5 三角恒等变换	诱导公式都是特殊角与任意角 α 的和(或差)的三角函数与这个任意角 α 的三角函数的恒等关系. 如果把特殊角换为任意角,那么任意角 α 与 β 的和(或差)的三角函数与 α, β 的三角函数会有什么关系呢?	探究:如果已知任意角 α, β 的正弦、余弦,能推出 $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ 的正弦、余弦吗? 下面我们探究 $\cos(\alpha - \beta)$ 与角 α, β 的正弦、余弦之间的关系.
人民 B 版 必修第三册第八章 向量的数量积与三角恒等变换	由摩天轮抽象出问题:能否由 α, β 的正弦和余弦求出 $\sin(\alpha + \beta)$? 进一步引申为:能否用 α, β 的三角函数表示 $\alpha \pm \beta$ 的三角函数?	尝试与发现:(1)已知 $30^\circ, 45^\circ$ 的正弦、余弦值,能否根据这些值求出 $\cos 15^\circ$ 的值? (2)一般地,怎样根据 α 与 β 的三角函数值求出 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值?

① 中国教育学会一般规划课题“PDSA 视域下的课例研修对数学教师专业发展影响研究”(201900312201B)的研究成果.

续表

版本 章节	导言概述	情境
北师大版 必修第二册第 4 章三角恒等变换	三角恒等变换在数学和其它领域的重要意义.	问题提出: 已知任意角 α, β 的正弦、余弦, 能推出 $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ 的余弦吗?

2.2 “多头”探究

现行教材遵从《标准》规定: 经历推导两角差余弦公式的过程, 由此推导其余的和角、差角、倍角的公式. 虽然各版本教材推导两角差余弦公式创设的问题情境(见表 1)不同, 但都直接指向两角差余弦. 需要思考的是: 怎能想到先搞定两角差余弦, 为什么不是两角和正弦, 其它是否可以?

事实上, $C_{\alpha-\beta}, C_{\alpha+\beta}, S_{\alpha-\beta}, S_{\alpha+\beta}$ 四个公式, 只需证明之一, 就可借由诱导公式或变量代换推得另外三个. 即, 四个公式谁领衔都不为过. 自上世纪 50 年代开始, 教材经历了 4 次之变. 最早的教材是先证明 $S_{\alpha+\beta}$, 70 年代改 $C_{\alpha-\beta}$ 为首, 90 年代再改 $C_{\alpha+\beta}$ 为始.^[1]自 2003 年《普通高中数学课程标准(实验)》颁布后, 又回归到 $C_{\alpha-\beta}$. 可见, $C_{\alpha-\beta}, C_{\alpha+\beta}, S_{\alpha-\beta}, S_{\alpha+\beta}$ 谁为首席, 教材编写者为学生操碎了心. 问题是学生领情吗? 为此我们调研了上研究课的学生, 问卷和统计结果见表 2. 统计结果表明: 近五成的学生首选和角作为先导, 只有三成多学生将差角作为首选. 各组研究的顺序, 基本上以正弦或余弦为始.

表 2 学生调研统计

问题	统计结果
下列三组公式能否由一组推导出其余两组? 组①(和角): $\sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta), \tan(\alpha + \beta)$ 组②(差角): $\sin(\alpha - \beta), \cos(\alpha - \beta), \tan(\alpha - \beta)$ 组③(倍角): $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \tan 2\alpha$	能 91%; 不能 9%
你准备先推导哪组公式?	组① 49%; 组② 33%; 组③ 18%
请写出各组公式你计划的研究顺序.	②差角←①和角→③倍角 ①和角←②差角→③倍角 ③倍角→①和角→②差角

续表

问题	统计结果
请写出你准备先推导的公式	$\sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha - \beta), \cos(\alpha - \beta), \sin 2\alpha, \cos 2\alpha$

考虑到学习者为北京市某示范高中校的数学优生, 我们将和、差、倍角三组公式的整体“多头”推导, 作为三角恒等变换起始课的内容, 不仅强化数形结合的逻辑推理, 而且将三组公式纳入到相应的知识框架中, 为灵活解决相关问题奠基.

3 合作探究

3.1 和差倍角何为首

教师请选择倍角为首的学生 L 发言: “倍角可看成两个角相加的特例, 我原来想特殊到一般, 现仔细一琢磨, 倍角公式证明了, 也无法直接应用到和角或差角上, 还得再从头证明”. “也不是完全无用”教师总结道, “从特殊到一般是一种常用的研究方法, 至少可让我们通过特殊的样态, 推知一般的形式”.

经过比较, 学生明确了由和角或差角出发研究均可, 因为证明了和角或差角公式, 经过换元或特殊化即可得到另外两组公式.

3.2 齐头并进谁争雄

至于选择哪个具体三角函数开始研究, 毫无悬念地学生一致认可正弦或余弦函数. 于是根据前测, 将学生分为四组探求公式, 并确定了研究任务和顺序(表 3).

表 3 研究任务和顺序

甲组	$\sin(\alpha + \beta) \rightarrow \cos(\alpha + \beta) \rightarrow \tan(\alpha + \beta)$
乙组	$\cos(\alpha + \beta) \rightarrow \sin(\alpha + \beta) \rightarrow \tan(\alpha + \beta)$
丙组	$\sin(\alpha - \beta) \rightarrow \cos(\alpha - \beta) \rightarrow \tan(\alpha - \beta)$
丁组	$\cos(\alpha - \beta) \rightarrow \sin(\alpha - \beta) \rightarrow \tan(\alpha - \beta)$

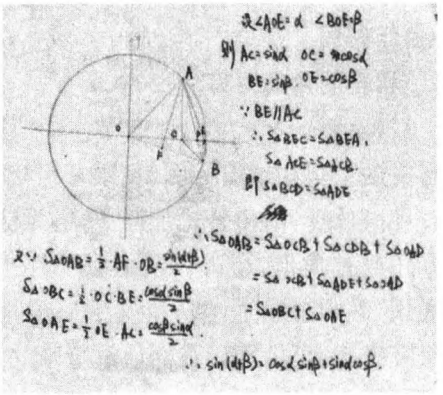
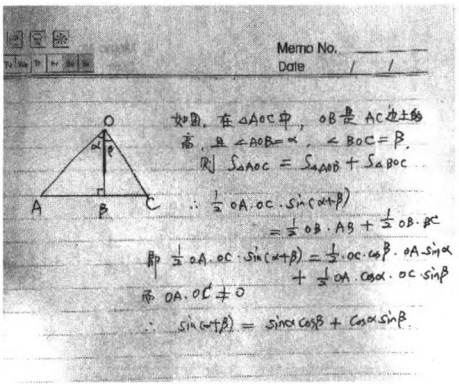
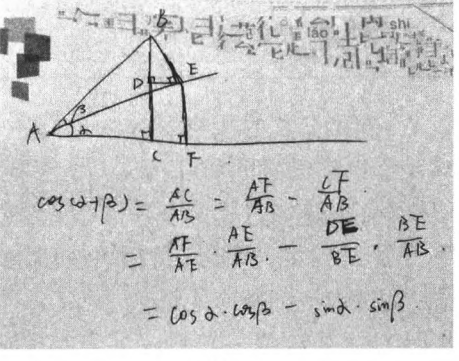
3.2.1 起始公式的探究

4 个组都无意间将 $\alpha, \beta, \alpha \pm \beta$ 限制到锐角范围, 不约而同地通过构造三角形, 利用锐角三角函数的定义、相关三角形以及相关线段的关系等知识构造方程, 得到相应的结论.

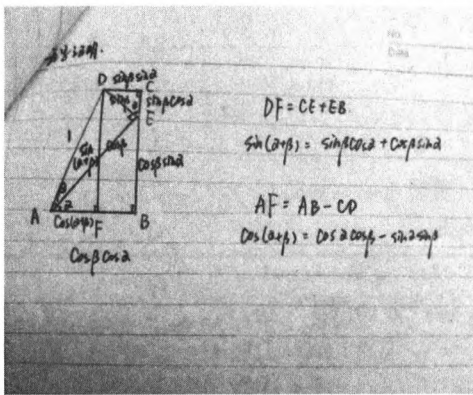
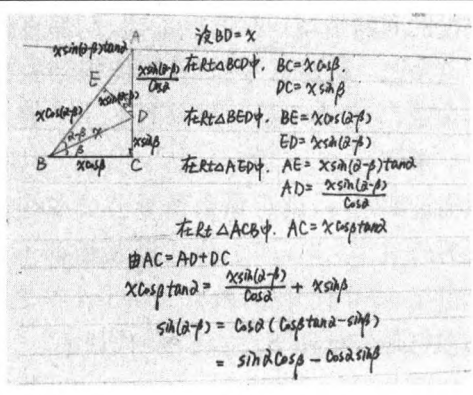
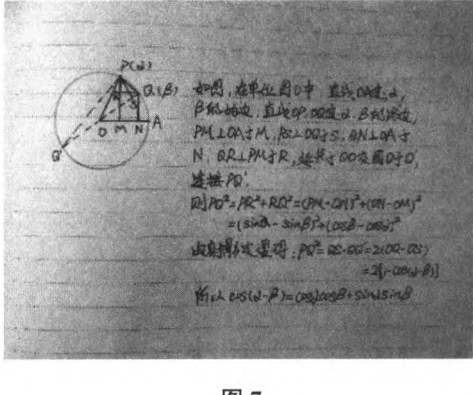
为什么要构建三角形? 各组都回应了理由. 比如, “构造直角三角形, 就能利用锐角三角函数

的定义表示各边,然后利用三角形的等积变换以及相关三角形面积间的关系,列出以 $\sin(\alpha+\beta)$ 为未知数的方程(图 1)”“构造了含 $\alpha, \beta, \alpha-\beta$ 的直角三角形,利用锐角三角函数的定义以及相关线段间的关系,列出以 $\sin(\alpha-\beta)$ 为未知数的方程(图 6)”“构造了含 $\alpha, \beta, \alpha-\beta$ 的直角三角形,利用锐角三角函数的定义、勾股定理以及相关直角三角形间的关系,列出以 $\cos(\alpha-\beta)$ 为未知数的方程(图 7)”.

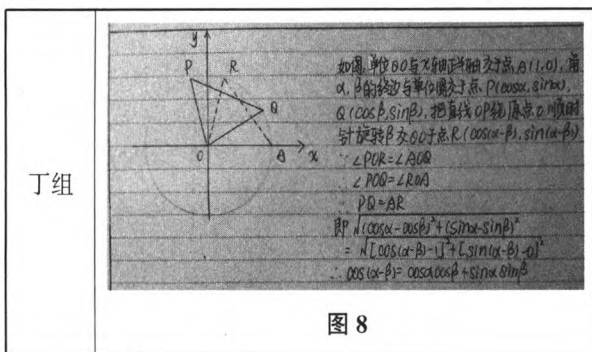
表 4 初始公式证明

	 图 1
甲组	 图 2
乙组	 图 3

续表

乙组	 图 4
丙组	 图 5
丁组	 图 6

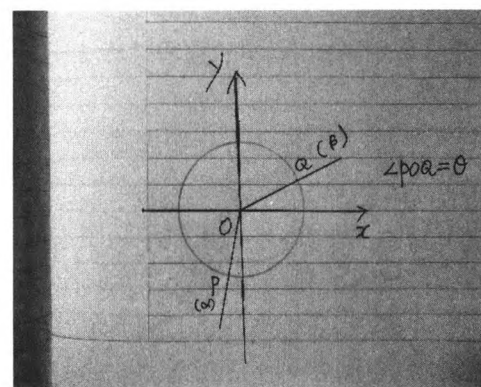
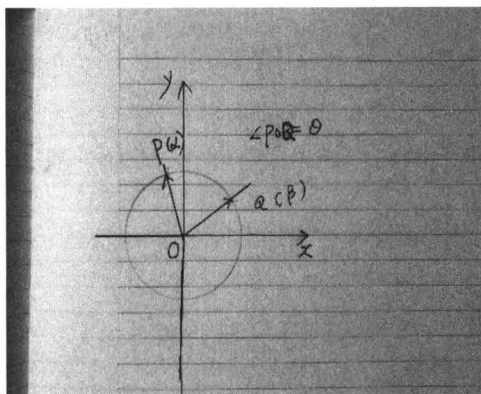
续表



虽然探究有局限,但数形结合使学生对公式本质有了深刻认识,得到的公式结构为进一步严格证明指明了方向.学生在课后总结时说:“在解决问题时,要抓主要矛盾,当然选择策略也很重要!”“自己推导的公式,觉得特别清楚,印象深刻”.

接下来教师以丁组推导的两角差的余弦公式为例,引导学生将角一般化(图 8),通过分类讨论完善了证明.随后教师启发到:咱们刚学完向量的相关知识,你们还有其他的方法吗?“我联想到了向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 的数量积,即 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$,再利用数量积的定义得 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos\theta = \cos\theta$ (θ 为向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 的夹角),后面我就短路了……”学生 Z 遗憾地说,“他的想法是否有代表性?”,教师问道,不少学生点头.“我说呢,咱们班为什么没人用向量证明,原来你们遇到了困难”,教师继续说“想用向量解决问题,就要寻找向量夹角与已知角 α, β 的关系,那么角 α, β 与向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 的夹角 θ 有何区别与联系呢?”带着问题,学生思考发现:(1)角 α, β 是终边分别落在射线 OP, OQ 上的角,有无数多个;(2) θ 是两向量的夹角,唯一且 $\theta \in [0, \pi]$;(3)角 α, β 与向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 的夹角 θ 的关系有两种情况: α 与 $\beta + \theta$ 的终边相同,即 $\alpha = 2k\pi + \beta + \theta (k \in \mathbf{Z})$ (图 9); α 与 $\beta - \theta$ 的终边相同,即 $\alpha = 2k\pi + \beta - \theta (k \in \mathbf{Z})$ (图 10). 综上可得: $\alpha - \beta = 2k\pi \pm \theta (k \in \mathbf{Z})$; 所以 $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\pm\theta) = \cos\theta \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$.

学生刚学完向量知识,却没有人用此工具解决问题.无论是想用因受阻而放弃,还是不熟悉而不愿意用,当他们用自己熟悉的构造三角形的方法和方程思想部分解决问题后,再回到向量方法,不仅找到了新旧知识之间的联系,而且也开阔



了问题解决的视角,理解了现行教材以差角的余弦为始的用意,对向量作为工具的认识有了提升.

3.2.2 其余公式的探究

$C_{\alpha-\beta}, C_{\alpha+\beta}, S_{\alpha-\beta}, S_{\alpha+\beta}$ 作为起始公式分组证明后,学生推导同角的余弦或正弦公式的方法主要有三种:构造三角形、利用同角基本关系式、逆用诱导公式. 比较后,学生领悟到通过诱导公式可以充分利用已证明的公式,也省去了分类讨论的繁琐. 值得指出的是,逆用诱导公式,本质上是恒等变形(等式 1). 学生在变形中,联想、转化、构建等活动,让他们体验到战胜挑战的满足,同时思维得到了锻炼.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \sin\left[\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta)\right] = \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \beta\right] \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos\beta + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin\beta \\ &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta. \end{aligned}$$

等式 1 采用诱导公式 $S_{\alpha+\beta}$ 推导 $C_{\alpha+\beta}$

当甲组的同学 W 亮出和角正切的推导过程及结果(等式 2)时,乙组的一名同学质疑:能否只用两角的正切表示两角和的正切? 见 W 有些迟

疑,教师提示到:看看式子的结构. W 喃喃到:“分子分母均为二次齐项式,分子分母可同除以 $\cos\alpha\cos\beta$ ”. 于是他继续推导(等式 3),此时教室里响起了掌声,这该是对同学 W 独立思考的奖赏吧.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

等式 2 $T_{\alpha+\beta}$ 的推导过程 1

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \\ &=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.\end{aligned}$$

等式 3 $T_{\alpha+\beta}$ 的推导过程 2

4 思考建议

4.1 先行组织者与逐步分化循序渐进

奥苏伯尔(D·P·AuSubel, 1918—2008)从学生获取信息的角度,提出了教学顺序:起点应先确定在学习层级的较高点,即先呈现一个一般的、有较大包容性的、较抽象的概念和原理,即所谓组织者. 由于组织者一般是在学习内容之前呈现的,故被称为先行组织者. 然后采用逐步分化原则,再学习一些具体的学习内容.^[2]这一主张,为数学章节教学提供了一种思路,即整体——部分——整体. 首先章节的起始课,应构建“先行组织者”,为后续学习提供导航作用的知识框架,以及为思维参与提供支撑的思维支架. 其次章节的后续学习,采用逐渐分化的原则,体现了从整体到部分的认知过程. 最后章节的复习课,再次复盘“先行组织者”,既有利于新内容的学习,又能深化已有相关内容的理解. 这样的教学顺序,与知识的组织方式契合,也符合学生的认知,有助于帮助学

生形成良好的知识结构. 本节课的设计,正是构建“先行组织者”的起始课.

近几年,国内外学者进一步拓展了“先行组织者”的理论,提出“先行组织者”在包容性和抽象概括程度上既可以高于学习材料,也可以低于学习材料.^[3]根据数学学科本身的系统性、逻辑性,从结构上说,“先行组织者”主要有上位组织者、下位组织者、并列组织者及类比组织者等.^[2]

4.2 知识积累与思维训练并驾齐驱

杜威(Dewey, 1859—1952)概括了思维的三种价值:有意识、有目的的行为的可能;系统化预测的可能;拓宽了客观事物的含义.^[4]前两者属于实际价值,能让学生更好地遇见当今或未来的社会生活;而第三种价值,在于让学生精神世界的丰盈. 本课例起始公式的探究中,教师创设“多头”探究活动,以及放手让学生在数与形的构建中分组遨游,没有牵引学生直接应用解析几何及向量工具快速证明,其意义在于既重视实用思维的价值,更尊重学生的认知起点,关注其学科价值的充实. 实践表明只有在充分思维训练过程中获得的知识,才是“活”的、能得以有效运用的知识.

参考文献

- [1] 华显楠. 关于两角和差的三角函数教学中的一个问题[J]. 数学教学, 1992(02): 17—19
- [2] 伍春兰. 中学数学系统化教学设计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016: 21—22
- [3] 施良方. 学习论—学习心理学的理论和原理[M]. 北京: 人民教育出版社, 1994: 252
- [4] 约翰·杜威. 我们如何思维[M]. 杨韶刚, 刘建金, 译. 北京: 中国轻工业出版社, 2017: 17—20

(上接第 26 页)

- [35] Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications[J]. Journal for Research in Mathematics Education, 2001, 32(2): 124—158
- [36] J Garfield, L Le, A Zieffler, D Ben-Zvi. Developing students' reasoning about samples and sampling variability as a path to expert statistical thinking[J]. Educational Studies in Mathematics, 2015, 88(3): 327—342
- [37] Bolch, Charlotte A., and Tim Jacobbe. “Investigating Levels of Graphical Comprehension Using the LOCUS Assess-

ments.” Numeracy 12, Iss. 1 (2019): Article 8. DOI: <https://doi.org/10.5038/1936-4660.12.1.8>

- [38] Seiji Maki, Tatsuya Horita. Comparative Study of the Categorization of Items of Statistical Literacy in Mathematics textbooks of elementary, junior high, and high schools in Japan[J]. International Journal of Learning Technologies and Learning Environments, 2018, 1(1): 79—92
- [39] Maxine Pfannkuch & Pip Arnold & Chris J. Wild. What I see is not quite the way it really is: students' emergent reasoning about sampling variability. Educational Studies in Mathematics, 2015, 88(3): 343—360