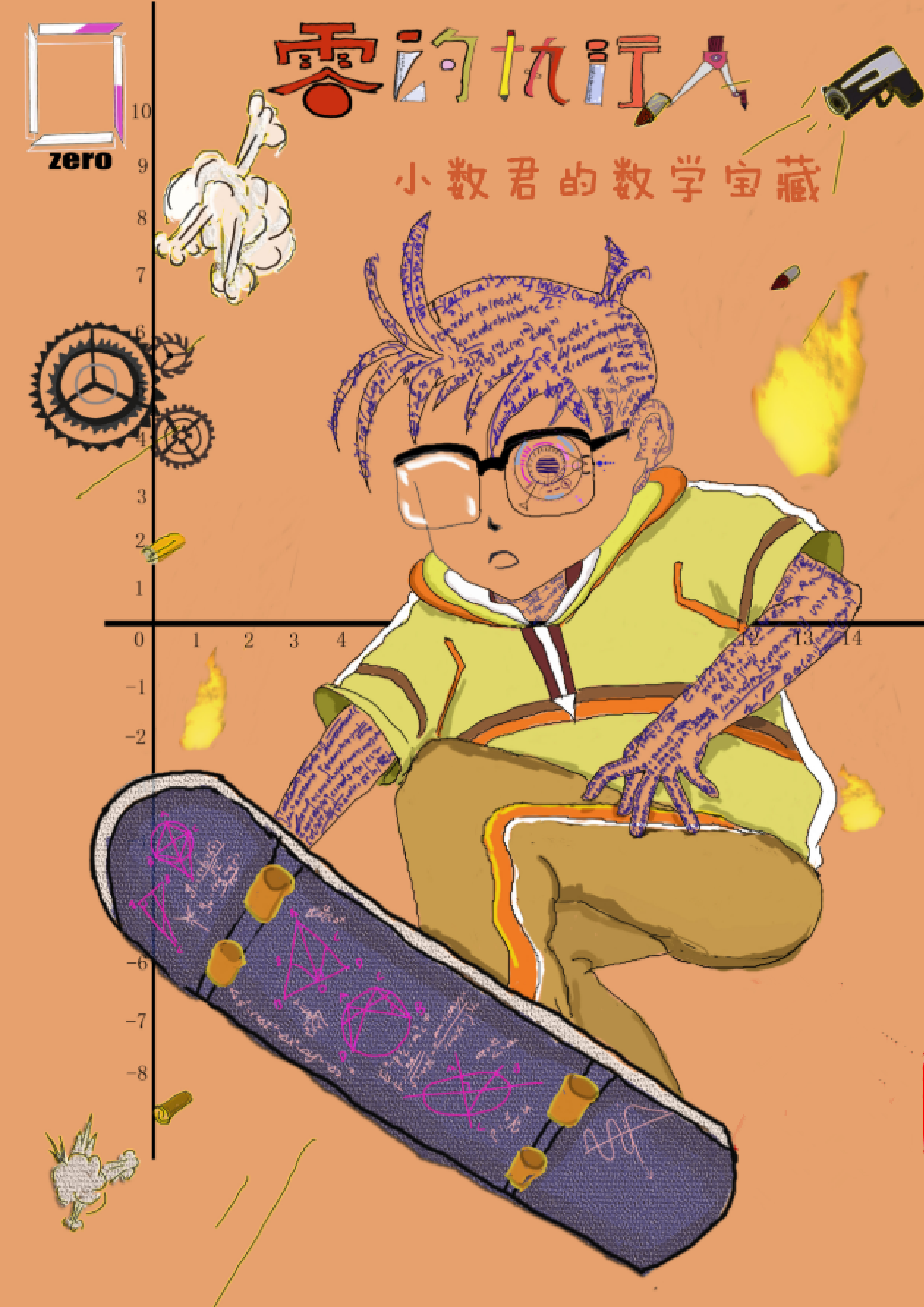
零的执行人
小数君的数学宝藏
zero

这是一个浩大舰队远征灿烂宇宙，无比波澜壮阔的时代，

我们每一个人都是这个时代的战士，我们都怀揣着一个名为数学、数学竞赛的梦，无数英勇的战士前仆后继，坚强的生存与光荣的牺牲交相辉映，

这是一场或许我们用一生都追逐不到尽头的梦，

但是我们无所畏惧，我们引吭高歌，我们竭尽全力，

我们所走过的梦，是用一个个音符所点缀出来的战歌，我们每一个都是唱着歌的追梦人啊！

这个梦带给我们追逐的力量，带给我们迎难而上的拼劲，还有一个绚丽夺目的数学世界，前方的路虽然很黑，但是请看看在你周围这些带着光芒的人，他们和你一样，和我一样，都是在这条路上行走的伙伴，

他们和你一样，和我一样，都是这个时代爱数学、爱数学竞赛的傻子们，

嘿，傻子，这个时代欢迎你的到来，

嘿，傻子，加入这个“傻子俱乐部”吧，接下来，让我们一起走吧

—来自傻子俱乐部，最爱你们的小数君

第一部分　问题

1. 检验级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性，其中 $a_n = \left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\right]^2$.

2. 如果 r 是正整数，试证

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2r+1)\psi}{\sin\psi}d\psi = \frac{\pi}{2},$$

及

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2r\psi}{\sin\psi}d\psi = 2\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{r-1}}{2r-1}\right\}.$$

3. 解联立函数方程

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \frac{\phi(y)\cdot\psi(x)}{1-\phi(x)\phi(y)},$$
$$\psi(x+y) = \frac{\psi(x)\psi(y)}{1-\phi(x)\phi(y)}.$$

4. 计算循环行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} \text{和} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{vmatrix}$$

的值，其中后者的 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 构成一个算术级数.

5. 证明：当 $|x|<1$ 时，

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = x + \sum_1^{\infty} \frac{3\cdot7\cdots(4n-5)(4n-1)}{5\cdot9\cdots(4n-3)(4n+1)}x^{4n+1},$$
$$\left(\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\right)^2 = x^2 + \sum_1^{\infty} \frac{3\cdot7\cdot\cdots(4n-5)(4n-1)}{5\cdot9\cdots(4n-3)(4n+1)}\frac{x^{4n+2}}{2n+1}.$$

6. 设一绳子挂在一个固定于建筑物楼顶的滑轮上，绳的一端悬一重物，它正好与紧抓在绳子另一端的猴子相平衡. 假设这猴子开始向上爬，将有什么结果？

7. 试证：若 y_x 是函数方程 $y_x = \frac{y_{x+1}^2}{x} + y_{x+1}$ 关于 x 的正整值的解，且 $y_x > 0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} y_x \cdot \log x = 1$.

8. 边长为 1，3，5，7，$\cdots$ 的一些等边三角形，底边角顶靠角顶地依次放置在一直线上. 试证：它们的顶点在一抛物线上，且各顶点到此抛物线的焦点之距离都是整数.

9. 两个抛物线有平行的轴，试证：它们公共的弦平分公共的切线.

10. 设 f 是 n 个变量的齐次多项式，H 是它的海赛（Hessian）行列式，试证：f^2 的海赛行列式是 CHf^n，其中 C 是常数.

11. 如果在化 q/p（p、q 是整数，$q>p$）为小数时，余数总是 $p-q$，则这个分数给出一个循环小数，它的循环节中的位数，正好是已得商的位数的两倍，且其余各位数字可由一串 9 减去已求得的商得到，而不必再进行除法运算了.

12. 只用直尺和圆规，分一个等边三角形为四个直边块，使它们可拼成一个正方形.

13. 邮寄包裹时，只要它的长度与最大围长（依垂直于长度的方向来量度）的和不超过 72 时时，则不管它的重量，均按小包邮件寄运. 问寄小包的正方形窗口，至少应是多大，才可使一切合于上述规定的矩形小包裹箱能顺利通过.

14. 一个人正从以不变角速度倾侧的一个圆锥形饮料杯中饮水. 问在怎样的角度下供给量是最大的，在什么角度下水面是最小的？

15. 确定一点，使它到 n 个已知点的距离之和为最小.

16. 对无穷级数

$$S_2(x)=1+\frac{3x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}+\frac{6x^6}{6!}+\cdots$$

求和，其中系数的分子构成一个数字级数，它的三阶差分等于 2.

17. 不用直尺，下面的作图能行吗？作一直线与四条给定的偏斜（两两不在一平面上的）直线相交.

18. 某文中说："容易证明，如果 $p>0$ 是整数，关系式

$$a_1\sin\frac{\pi}{2p}+a_2\sin\frac{2\pi}{2p}+\cdots+a_{p-1}\sin\frac{(p-1)\pi}{2p}+a_p=0$$

中，若一切 a 是整数，必需 $a_1=a_2=\cdots=a_{p-1}=a_p=0$"．试证之.

19. 方程 $x^p+y^p+z^p=0$ 有与奇素数 p 互素的整数 x、y、z 只要

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}N_2(p)-\frac{1}{3}N_3(p)+\frac{1}{4}N_4(p)-\cdots+\frac{1}{p-1}N_{p-1}(p)\right]+1$$

可被 p 整除，其中 $N_r(n)$ 为将 n 表示为 r 个使根 $\geqslant 0$ 的整数的平方和（次序是重要的）的表示法的个数. 试证明之.

20. 一个半径为 R 的球，由两相交的直线上滚下，两直线夹角为 2α 且等倾斜于水平面，试证球中心的轨迹是两半轴分别为 $Rcsca$，R 的椭圆.

21. 设 T 表示 xy 平面的一个开连续统，例如一个光滑的单闭曲线的内部. 那么，若 U 在 T 内连续，且对一切具连续二阶导数而在 T 边界上变为零的函数 V，使

$$\iint\limits_T U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)dxdy=0,$$

则 U 是调和的，即满足拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$.（若 U 在 T 的边界点的邻域内变为无穷大，则应进一步限制 V 使积分有意义.）

22. 令 $a_1=a$，$a_2=a^{a_1}$，$a_3=a^{a_2}$，$\cdots$，$a_{n+1}=a^{a_n}$，$\cdots$，a_n 作为 a 的函数. 讨论 $\lim\limits_{n=\infty}a_n$（对某些 $a>1$ 的值，极限也存在.）

23. 考虑数 a_{st} 的 $m\times n$ 矩阵 A 和数 b_{ts} 的 $m\times n$ 矩阵 B. 试证明 mn 个方程的方程组

$$\sum_{tu}a_{st}b_{tu}a_{uv}=0 \quad (s\nu)$$

蕴含方程

$$\sum_{ts}a_{st}b_{ts}=0.$$

下标 s，u 取值范围 $1,2,\cdots,n$，t，v 取值范围 $1,2,\cdots,n$.

24. 把一个三次方程的根看作长度，它们形成一个三角形. 问这方程系数间的关系应当是怎样的?

25. 如果 $f(x)$ 是区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上 x 的单值连续函数，它不恒等于零，且满足不等式 $0\leqslant f(x)\leqslant M$，试证明

$$0\leqslant\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2-\left[\int_a^b f(x)\cos xdx\right]^2-\left[\int_a^b f(x)\sin xdx\right]^2\leqslant\frac{M^2(b-a)^4}{12}.$$

26. 给定序列：$u_1=2,u_2=8,u_n=4u_{n-1}-u_{n-2}(n=3,4,5,\cdots)$. 试证

$$\frac{\pi}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arccot}u_n^2.$$

27. 如果 $n>2$ 及 ε 是 $\varepsilon^n=1$ 的元根，试证

$$\begin{vmatrix}\varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \cdots & \varepsilon^{n-1}\\ \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \cdots & \varepsilon^{2(n-1)}\\ \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \cdots & \varepsilon^{3(n-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)(n-1)}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{4}}n^{\frac{n-2}{2}}.$$

28. 用四个量 a_1, a_2, a_3, a_4，不改变它们的次序，我们可以形成下列的繁分数:

$$\frac{a_1}{\frac{\frac{a_2}{a_3}}{a_4}} \quad \frac{a_1}{\frac{a_2}{\frac{a_3}{a_4}}} \quad \frac{\frac{a_1}{a_2}}{\frac{a_3}{a_4}} \quad \frac{\frac{\frac{a_1}{a_2}}{a_3}}{a_4} \quad \frac{\frac{a_1}{\frac{a_2}{a_3}}}{a_4}$$

但这些值并非都互异，第一个和第四个是相等的. 试确定以这种方式能得到多少个不同的关于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的有理函数，哪些能以不止一种方式表为上述类型的繁分数，哪些仅有一种方式表为上述类型的繁分数.

29. 如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是任何实的或复的量，它们满足方程

$$x^n - na_1x^{n-1} +_n C_2a_2^2x^{n-2} + \cdots + (-1)^i \ {}_nC_ia_i^ix^{n-1} + \cdots + (-1)^na_n^n = 0.$$

其中 ${}_nC_i = n!/(n-i)!i!$，试证 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

30. 试证：$y^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ 的一切整数解为 $x = -1, 0, 3$；$y = \pm 1, \pm 1, \pm 11$.

31. 如果 $a, b, \cdots, i$ 都是实数 $\geqslant 0$，且对 r 的五个不等于零的实值，使 $\begin{vmatrix} a^r & b^r & c^r \\ d^r & e^r & f^r \\ g^r & h^r & i^r \end{vmatrix}$ 等于零，试证行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ 要么有两行或两列成比例. 要么有一行或一列是零.

32. 试述不借助于帕斯卡的六边形定理，而只用直尺怎样过圆周（或圆上一弧）上一已知点作圆的切线.

33. 在水平地面上有两堵平行直立的墙，一架长为 a 的梯子其脚抵住第一堵墙的墙脚，上端靠在第二堵墙上；另一长为 b 的梯子，其脚抵住第二堵墙的墙脚，上端靠在第一堵墙上. 问两墙相距多少，能使该两梯在高度 h 上交叉？什么时候可能有解？

34. 如果 X 是一正无理数，而 Y 是它的倒数. 证明在每一对相邻的正整数间，序列

$$\begin{array}{llll} (1+X), & 2(1+X), & 3(1+X), & \cdots \\ (1+Y), & 2(1+Y), & 3(1+Y), & \cdots \end{array}$$

包含一个且仅一个数.

35. 下面的叙述正确吗？

设两曲线方程用极坐标 (ρ, θ) 表示，其交点可由解关于 ρ、θ 的联立方程得到.

36. 证明：设以满足 $a^3 + b^3 + c^3 = 3m^3$ 的 a、b、c 为边作三角形，其面积之最大值为 $\dfrac{m^2}{4}\sqrt{3}$.

37. 有一堆椰子，一个人把一个给猴子之后，剩下的正好被 n 整除，他拿走了剩下椰子的 $1/n$，而把其余的留下；第二个人重复这样做，在把一个给了猴子后又拿走了剩下的 $1/n$；这样继续下去，到末了第 n 个人留下的一堆椰子也恰能被 n 整除. 问开始时有多少椰子，到末了还有多少？

38. 如果 $i!f_i = \dfrac{d^i f(x)}{dx^i}$，且

$$D = \begin{vmatrix} f_r & f_{r+1} & \cdots & f_{r+n-1} \\ f_{r+1} & f_{r+2} & \cdots & f_{r+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{r+n-1} & f_{r+n} & \cdots & f_{r+2n-2} \end{vmatrix},$$

试证 $\dfrac{dD}{dX} = (r+2n-1)D'$.

其中 D' 是将 D 的最后一行的下标加 1 而得到的行列式.

39. 一质点沿一平面曲线运动，速度与此点位置的纵标成正比，且由 (x_1, y_1) 到 (x_2, y_2) 所历时间为最短，试求该曲线的方程.

40. n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的均方根，由公式

$$R_\bullet M_\bullet S_\bullet = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

定义.

（a）n 为什么值时，使前面 n 个整数的均方根也是整数？

（b）a 及 n 为什么值时，使 n 个相继整数 $a, a+1, \cdots, a+n-1$ 的均方根也是整数？

（c）在什么条件下，n 个整数的均方根也是整数？

41. 若 v 是大于或等于 1 的整数，则

$$\int_0^\infty \frac{(1+z)^{-v} dz}{\log^2 z + \pi^2} = (-1)^{v-1} \int_0^1 \binom{t}{v} dt.$$

其中 $\dbinom{t}{v} = \dfrac{t(t-1)\cdots(t-v+1)}{v!}$.

42. 已知直角三角形内切圆的半径等于两股的和同斜边之差的一半. 试对直角四面体内切球面的半径导出一个类似的表达式.

43. （a）试证：当 x、y 是整数时，除了 x 或 y 能被 3 整除外，$x^2 + y^2$ 不会是一个整数的平方.

（b）对 x 和 y 都是被 3 整除的情形改进本定理.

（c）推广本定理以包括别的指数，从而证明费马（Fermat）大定理的一部分.

44. 试证:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{2nx}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\pi-\frac{\pi}{2}\log 2\pi,$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{nx}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\log \pi.$$

45. 一个半径为 a 的水磨轮子在旋转，其边缘的速度是 v，水滴从其边缘摔出，试求水滴轨线的包络线.

46. 证明:

$$\frac{\pi}{6}=\sum_{1}^{\infty}\operatorname{arccot} 2u_r^2.$$

其中 $u_r=4u_{r-1}-u_{r-2}$，且 $u_1=1$，$u_2=3$.

47. 如果在方程

$$s!\left[\frac{1}{(s+1)!}+\frac{c_3}{4!(s-1)!}+\frac{c_5}{6!(s-3)!}+\frac{c_7}{8!(s-5)!}+\cdots+\frac{c_s}{(s+1)!2!}\right]=0$$

中，给定 $c_3,c_5,c_7,\cdots,c_s$，且当它们保持某种常数时，对一切 $s(s>1)$ 的正奇整数值（1）式都成立. 试证：如果 s 减少 1（所以 $s=2n$），则左端将按 n 是奇或偶而等于 $\pm B_n$，B_n 是第 n 个伯努利数. 还阐明，若不先求出前头的所有常数，怎样求出 $c_3,c_5,\cdots,c_s$ 中任何一个常数?

48. 若以方程 $f(x)=0$ 的每一个根，减去方程 $f'(x)=0$ 的每一个根，求这些差的倒数之和.

49. 证明方程组

$$\begin{aligned}&\phi(x,y)=x+y+\sum A_{ik}x^iy^k=1,\\&x\phi_x'-ay\phi_y'=0.\end{aligned}$$

其中 $A_{ik}>0,a>0,2\leqslant i+k\leqslant n$ 在正数中有且只有一个解.

50. 证明或者否定

$$\sum_{i=0}^{t}(-1)^i\binom{r+1}{i}\binom{2r-2i}{r}=r+1.$$

其中若 r 是偶数，则 $t=\dfrac{r}{2}$；r 是奇数，则 $t=\dfrac{r-1}{2}$.

51. 证明或否定

$$\sum_{i=0}^{t}\left[\frac{(r-1)!(r-2i)}{(r-i)!i!}\right]^2=\frac{(2r-2)!}{r!(r-1)!}.$$

其中若 r 是偶数，$t=\dfrac{r-2}{2}$；若 r 是奇数，$t=\dfrac{r-1}{2}$.

52. 作一正方形，使其每边各通过一给定点.

53. 证明

$$\frac{7\sum n^6+5(p+1)\sum n^4+p\sum n^2}{7\sum n^6-5(p-1)\sum n^4-p\sum n^2}=\frac{n^2+n+p}{n^2+n-p},$$

其中

$$\sum n^6=(6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n)/42,$$
$$\sum n^4=(6n^5+15n^4+10n^3-n)/30,$$

与

$$\sum n^2=(2n^3+3n^2+n)/6.$$

54. 一个凸 n 边形由其对角线分成一些三角形，这些对角线只在端点处相交. 试求这种分法数目的表示式.

55. 用许多个单位电阻在点 A 和点 B 间构成任一电阻 p/q（其中 p 和 q 是整数），在物理上是可能的，这可以通过并联 q 组每组电阻为 p 的电阻来实现，这需要 pq 个单位电阻. 可是，由数目更少的单位电阻器来实现同样的结果通常是可能的. 问题就是："求在一个电路中的 A 点和 B 点间形成 p/q（p、q 是整数）单位的电阻所必需的单位电阻最少是多少个？"

56. 解 $\int_0^{\frac{dy}{dx}}\dfrac{\cos wdw}{16+9\sin^2 w}=\dfrac{1}{12}\tan^{-1}(x)$.

57. 一三角形外切于一圆. 证明以下三条直线是共点的：

（1）任意两边切点的连线；

（2）角的两条角平分线与这两边的交点的连线；

（3）这两边上的高之垂足的连线.

58. 设 p 为大于 1 的奇数，证明

（a）$1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(p-2)^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}} \bmod p$;

（b）$2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(p-1)^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}} \bmod p$.

59. 证明，每当正项级数 $u_1+u_2+u_s+\cdots$ 收敛，级数

$$\frac{u_1}{r_1}+\frac{u_2}{r_2}+\frac{u_3}{r_3}+\cdots$$

总是发散. 其中

$$r_n=u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

为第一个级数去掉前 $n-1$ 项的余项.

60. 注意到 $3003=\binom{15}{5}=\binom{14}{6}$. 求方程 $\binom{x+1}{y}=\binom{x}{y+1}$ 的正整数解.

61. 证明左上角为帕斯卡（Pascal）三角形

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \bullet & \bullet \\ 1 & 2 & 3 & \bullet & \bullet & \\ 1 & 3 & \bullet & \bullet & & \\ 1 & \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & & & & & \end{matrix}$$

的 n 阶行列式的值等于 1.

62. 证明积分

$$V_n=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

当 n 无限增加时收敛于 $2/3$，并且乘积 $n\left(V_n-\dfrac{2}{3}\right)$ 保持有界.

63. 解 n 个未知数的 n 个联立方程:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_n & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_3 & x_4 & \cdots & x_1 \end{vmatrix}=a_1;\quad \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_4 & x_5 & \cdots & x_2 \end{vmatrix}=a_2;\quad \cdots;\quad \begin{vmatrix} x_n & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ x_{n-1} & x_n & \cdots & x_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}=a_n.$$

64. 设 D_n 表示 n 阶行列式，其所有元素为 0 或 1，并且其每一行和每一列有两个 1 和 $n-2$ 个零. 证明:

（a）对任意 n，或者 $D_n=0$，或者 $D_n=\pm 2^m$，其中 m 和 n 同为偶数或同为奇数.

（b）若 $D_5=0$，则有两行完全相同，并且其逆亦真.

（c）若 D_n 有两行完全相同，则有两列也完全相同，并且其逆亦真.

（d）$3m\leqslant n$.

（e）证明除了 D_2、D_3 和 D_5 外性质（b）不成立.

65. 一根长 $2a$ 的细棒放置在半径为 r 的圆桌上，$r>a$，问棒的一端伸出、两端伸出或两端都不伸出桌子边缘的概率各等于什么？

66. 考虑形如 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{5}$，$\cdots$ 的分数. 我们寻求确定哪些 n 个这样的数（允许重复），它们的和小于 1 又尽可能地接近于 1. 如对 $n=3$，我们有 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{41}{42}$. 一般，试证明或否定级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1807}+\cdots$$

的前 n 个分数给出所要求的结果. 这里级数的每一分母比前面所有分母的乘积大 1.

67. 设复数 a,b,c 满足 $|a|=|b|=|c|=r\neq 0$，则有 $\left|\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right|=r$，并推广之.

68. 考虑平面上 n 个点，按任意顺序连这些点成一闭多边形，再对这多边形 n 边的中点依此重复施行，$\cdots$，如此不断重复，证明相继的多边形收敛于一点.

69. 证明

$$\begin{vmatrix} e_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_1 \\ e_{21} & e_{22} & 0 & \cdots & 0 & A_2 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & \cdots & 0 & A_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{n1} & e_{n2} & e_{n3} & \cdots & e_{nn-1} & A_n \end{vmatrix} = A_n - \sum A_{n/p_i} + \sum A_{n/p_ip_j} - \cdots + (-1)^s A_{n/p_1p_2\cdots p_s}$$

其中（1）$e_{ij}=1$，当 j 是 i 的因子；及 $e_{ij}=0$，当 j 不是 i 的因子；（2）$p_i,p_j,\cdots$ 是 n 的不同质因子.

70. 恰有三个真分数，其分母小于 100，由不合规则的约分法约去一个数字后即为一个最简分数. 其中之一是

$$\frac{26}{65}=\frac{2\,\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5}.$$

求另外两个这样的真分数，并证明再没有其他这样的真分数.

71. 若 α 和 β 为正整数，且 $\beta>2$，则 $2^{\alpha+1}$ 必不能被 $2^{\beta-1}$ 除尽.

72. 将一椭圆在其所在的平面上转动，使其与一固定直线上的固定点保持相切，证明它的焦点轨迹曲线所围面积等于 $2\pi a(a-b)$.

73. 证明和一个星期中的其他日子相比较，一个月的十三号为星期五似有较大的可能.

74. 设 $\log x$ 的步长为 1 的 n 阶差分记为 $\Delta^n\log x$，证明

$$\lim_{n\to\infty} n^x \log n\Delta^n \log x=\Gamma(x).$$

75. 证明对任一 N，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{N}$ 一定不是一个整数.

76. 对有理的直角三角形求整数集，使由于数字的增加而逼近一个 30°—60° 的直角三角形.

77. 证明 $(a+b)^n$ 展开式的第 h、$(h+k)$、$(h+2k)$ 等项系数的和与所有系数的和之比，当 n 趋近于 ∞ 时收敛于极限 $1/k$，其中 $h=1,2,3,\cdots,k$，k 为正整数.

78. 将求二次方程实根的图解法，如迪克逊的方程论初步 P.29 所述，推广到适用于复根情形.

79. 证明：对 n 的一切正整数值，有

$$\sum_{k-1}^{n}(-1)^{k+1}\ {}_nC_k k^n=(-1)^{n+1}n!.$$

80. 证明任何一个其公差小于 2000 的整数算术级数，最多有十个相继整数可以是素数.

81. 设 d 是两个正整数 a 和 b 的最大公因子，记 $a=a'd$，$b=b'd$. 若 n 为任一大于 1 的正整数，证明只要 b' 是奇数，则 (n^a+1) 和 (n^b-1) 没有任何大于 2 的公因子.

82. 证明，由矩阵

$$\left\|\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & {}_1c_1 & {}_2c_1 & {}_3c_1 & {}_4c_1 & \cdots & {}_nc_1 & {}_{n+1}c_1 \\ 0 & 0 & {}_2c_2 & {}_3c_2 & {}_4c_2 & \cdots & {}_nc_2 & {}_{n+1}c_2 \\ 0 & 0 & 0 & {}_3c_3 & {}_4c_3 & \cdots & {}_nc_3 & {}_{n+1}c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}_4c_4 & \cdots & {}_nc_4 & {}_{n+1}c_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & {}_nc_n & {}_{n+1}c_n \end{array}\right\|$$

删去第 k 列所构成的行列式的值等于 ${}_{n+1}C_{k-1}$（不是 ${}_nC_{k-1}$）.

83. 通常，某些香烟厂商在他们的一些香烟盒中放置游戏的纸牌，如扑克等等. 并且，一副完整的纸牌，可从他们那里换得各种奖品. 现在提出如下问题:

假定每包香烟中含有一副纸牌 52 张中的一张，并且纸牌是随意分发在各包之中（被发卖的香烟包数有无限多）. 问要得到完整的一副纸牌，平均最少需要购买多少包香烟?

84. 证明边长为 a 的立方体绕其一空间对角线旋转所产生的旋转体体积等于 $\pi a^3/\sqrt{3}$.

85. 设有三角形 ABC 外接圆上一点 P，又有以 P 为焦点且与 ABC 的边相切的抛物线，则点 P 的西摩松（Simson）线是该抛物线在顶点的切线.

86. 建立开区间 $0<x<1$ 的点与闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的点之间的一个一一对应.

87. 证明 $a_{ij}=|i-j|$ 的 n 阶行列式的值为 $(-1)^{n-1}(n-1)\cdot 2^{n-2}$.

88. 分解 $x^8+98x^4y^4+y^8$ 为两个具有整数系数的多项式因式.

89. 对任意正整数 k，证明

$$\phi_k = \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} = \binom{2k-1}{k} / (2k-1)$$

为一整数；并证明递推公式

$$\phi_n = \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i \phi_{n-i}.$$

90. 证明以下定理:

如果 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ 只有实根，其中 n 是正整数，$a_n \neq 0$，并且所有系数为实数，则

（1）笛卡尔符号法则确切给出这方程的正根数与负根数

（2）由 $a_r = 0 (n > r > 0)$ 推出 $a_{r+1} a_{r-1} < 0$.

实对称矩阵的特征方程就是这样一类方程.

91. 设素数 P 形如 $P = 4h + 3$，又 m 是小于 $\frac{P}{2}$ 的二次非剩余数，证明

（a） $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (P-2) \equiv (-1)^{m+k} \bmod P$,

（b） $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (P-1) \equiv (-1)^{m+k+1} \bmod P$.

92. 设 $S(i, j)$ 表示 i 和 j 的公因子的积 $_2$ 证明

$$\begin{vmatrix} S(1,1) & S(1,2) & \cdots & S(1,n) \\ S(2,1) & S(2,2) & \cdots & S(2,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S(n,1) & S(n,2) & \cdots & S(n,n) \end{vmatrix} = n!$$

93. 解函数方程

$$f(x) f(-x) = c^2 = [f(0)]^2$$

$f(x)$ 只限于实变量 x 的正的实单值函数.

94. 证明有四个不同的整数集满足方程

$$x_1 + x_2 + x_3 = 54\ ,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1406.$$

对于用 a 和 b 替换 54 和 1406 的类似问题，提出一般的方法.

95. 一只狗和它的主人在岸边隔河正相对，河水以常速流动. 狗以在静水中每小时 2 哩的游速向对岸游去，在全部时间里它的游向始终朝着它的主人. 此人注意到，狗游到河宽三分之二的地方才停止向下游漂流，并且游过河的时间比在静水河中要多花五分钟，问小河有多宽?

96. 证明无穷乘积

$$\left(1-\frac{i}{3}\right)^4\left(1-\frac{i}{17}\right)^4\left(1-\frac{i}{99}\right)^4\left(1-\frac{i}{577}\right)^4\cdots$$

为纯虚数，其中相邻分母满足递推式 $D_n=6D_{n-1}-D_{n-2}$.

97. 证明八个相继整数的乘积的四次方根的整数部分等于 x^2+7x+6，其中 x 是这八个整数中最小者. 这一结果可用来证明八个相邻整数的乘积不会是任何整数的四次乘方.

98. 对 n 阶矩阵求基 h_{pq} 使基的每一元素是幂等的，且

$$h_{pq}h_{rs}=k_{pqrs}h_{ps}.$$

其中 k_{pqrs} 是有理数.

99. 设 a 和 n 是大于正整数 b 的正整数，则如果 $a^n+b^n=c^n$，c 便一定不是整数.

100. 设 $a_1=2\cdot 3, a_2=3\cdot 5, a_3=5\cdot 7,\cdots, a_k=P_k\cdot P_{k+1}\cdots$，其中 P_k 是第 k 个素数. 用 $f(x)$ 表示完全由这些 a_k 构成的小于或等于 n 的整数的个数（即形如 $\prod a_i^{a_i}$，$a_i\geqslant 0$ 的整数），证明

$$f(n)=cn^{\frac{1}{2}}+0\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\ \text{其中}\ \frac{1}{2}<c<1.$$

101. 有一三位数乘以 2 位数的乘积，其形式如下:

$$\begin{array}{ccccc} & & P & P & P\\ & & & P & P\\ \hline & P & P & P & P\\ P & P & P & P & \\ \hline P & P & P & P & P \end{array}$$

式中的 P 全是异于 1 的一位的素数，试确定它们的值，并证明解是唯一的.

102. 证明

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{{}_nC_r}{(x+r)(x+r+1)\cdots(x+r+n)}$$
$$=\frac{2^n}{x(x+2)(x+4)\cdots(x+2n)}.$$

103. 求使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}\sin(n^{\beta})$ 收敛的所有 α 与 β 的值.

104. 设 $E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$ 为区间 (a,b) 上的可测集无穷序列，对 $n=1,2,\cdots$，$mE_n\geqslant k>0$. 问是否一定存在某些下标的无穷序列 $1\leqslant r_1<r_2<\cdots<r_i<\cdots$ 使 $E_{r1}\cdot E_{r2}\cdots E_{ri}\cdots$ 的测度大于零?

105. 在从直角坐标系 $OX_1Y_1Z_1$ 到同余直角坐标系 $OX_2Y_2Z_2$ 的坐标变换中，我们有以下余弦表:

	X_1	Y_1	Z_1
X_2	λ_1	μ_1	ν_1
Y_2	λ_2	μ_2	ν_2
Z_2	λ_3	μ_3	ν_3

该阵列所对应行列式的值为 1. 证明 $\lambda_1+\mu_2+\nu_3\geqslant -1$.

106. 由无穷递减的费马方法证明形如 $3n+2$ 的奇素数 P 有二次非剩余 -3.

107. 证明当二次型

$$\sum_{1}^{n}|i-j|x_ix_j, n>1$$

可用实线性变换化为平方和时，则其中一项必是正的，其他 $n-1$ 项必是负的.

108. 设 $a_1,a_2,\cdots$ 是一个使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/a_n$ 发散的整数序列，则几乎所有的整数同某个 a_n 有一个公因子.

109. 内接于一给定圆中的三角形的顶点是外切于此圆的三角形的切点，证明：由圆上的任意一点到内接三角形的各边上的垂线之乘积等于由同点到外切三角形的各边上的垂线的积.

110. 导出下列公式:

(a) $\pi=\dfrac{10}{3}-24\left\{\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\dfrac{1}{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}-\cdots\right\}$.

(b) $\pi=3.15-360\left\{\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}-\dfrac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}+\cdots\right\}$.

(c) $\log2=\dfrac{17}{24}-12\left\{\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}-\dfrac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}+\cdots\right\}$.

(d) $\pi=\dfrac{64}{21}+96\left\{\dfrac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}-\dfrac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}+\cdots\right\}$.

111. 给定 $n+1$ 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$，每个小于或等于 $2n$，证明其中至少有一个能由此集合其他元素中的某一个除尽.

112. 两个全等的共面的抛物线有同一直线作为对称轴，且开口方向一致，由外面的抛物线上的任意一点向内部抛物线引二切线，证明由二切线和连结其切点的一段弧所围的面积是常数.

113. 某银行有十一个不同的职位，按从高到低的顺序为行长、第一副行长、第二副行长、第三副行长、经理、出纳、助理出纳、会计、第一速记员、第二速记员和门卫，这十一个职位由下列人员担任，按字母顺序排列是: 阿达姆先生，布朗太太，剑普先生，德欧女士，伊万先生，福特太太，葛兰先生，希尔小姐，约翰先生，凯恩太太，郎昂先生. 至于他们的情况仅知道下面的一些事实:

（1）第三副行长是行长宠爱的孙子，但并不为布朗太太和助理出纳所喜欢.

（2）助理出纳和第二速记员均分他们父亲的财产.

（3）第二副行长和助理出纳戴同一式样的帽子.

（4）葛兰特先生告诉希尔小姐要马上给他派一个速记员来.

（5）行长的紧邻是凯恩太太，葛兰特先生和郎昂先生.

（6）第一副行长和经理住在不大吸收新会员的独身俱乐部.

（7）门卫从小就一直住在那一间阁楼里.

（8）阿达姆先生和第二速记员是年轻未婚者中的社交活动家.

（9）第二副行长曾经和会计订婚.

（10）时髦的出纳是第一速记员的女婿.

（11）约翰先生定期把自己不穿了的衣服给伊万先生穿，却不让年纪较大的会计知道这件事.

问如何把这十一个人的名字正确地对上他们担任的职务？

114. 由已知的三角形 ABC 内的一点 O 作三边的垂线 OP，OQ，OR. 证明

$$OA+OB+OC \geqslant 2(OP+OQ+OR).$$

115. 一辆载有 $n(n>2)$ 个不同的思维反应速度的旅客通过一隧道，且每一个旅客都不觉得他自己前额上有了一个煤烟黑点，假定每个旅客

（1）当他一看到且他只在看到一个旅伴额上有黑点时，便笑起来且笑到黑点给抹去为止.

（2）能够看到他所有旅伴的前额.

（3）能正确地推论.

（4）当且仅当他的推断使他得出本人有黑点的结论时，会抹去他本人前额上的黑点.

（5）他知道对他的每一个旅伴（1）、（2）、（3）、（4）均适用.

证明：每一个旅客最终会擦抹他自己的前额.

116. 如果 p 是形如 $3n+1$ 的素数，当且仅当 2 是 p 的三次剩余，它能表示为 $p=A^2+27B^2$. 其中 A 和 B 是正整数.

117. 试证级数

$$S_n=C_n^0-C_{n-1}^1+C_{n-2}^2-C_{n-3}^3+\cdots$$

的和将是 $+1$，0 或 -1，分别由 n 形如 $6m$ 或 $6m+1$，$6m-1$ 或 $6m+2$，$6m+3$ 或 $6m+4$ 而定.

118. 给定一个三角形 ABC，其边 $a>b>c$，在它内部任取一点 O，设 AO，BO，CO 分别交对边于 P，Q，R，试证 $OP+OQ+OR<a$.

119. 试求特征方程

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0$$

所有的根相等的一个条件，式中的那些 a 都是实数且 $a_{ij}=a_{ji}$，并确定所有根均相等的各种情况.

120. 一个市镇从上午开始下雪，均匀地下着一直持续到天黑. 在正午，一个扫雪队开始沿着公路清除前方的积雪. 他们在头两小时扫清了两英里长的路面，但是在其后的两个小时内只扫了一英里长的路面. 如果这扫雪队在相等的时间里清除的雪量相等，试问雪是在什么时候开始下的？

121. 一个有盖的长方箱子内面的长、宽、高分别是 5，4，3 英尺. 有一形如直圆柱其直径为 9 英寸的邮件恰好成对角线地搁在箱内，与箱内六面都接触. 试问这邮件有多长？(注意这圆柱的轴如果延长将不会与箱子的角顶相交.)

122. 试证对于 x 的所有正实数值以及对于大于 1 的 n 的所有实数值，有

$$Sh^{n+1}nx + ch^{n+1}nx < ch^{n}(n+1)x.$$

并证明当 $0<n<1$ 及 $x>0$ 时不等号会反过来；若 $n=0$ 或 1，或者若 $x=0$，则要将不等号改为等号.

123. 计算 $\int_0^\infty e^{-x}\ln^2 x dx$.

124. 设在三角形 ABC 内，$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=1$，试证其外接圆与九点圆正交.

125. 证明

$$\begin{aligned} 61!+1 &\equiv 0 \mod 71, \\ 63!+1 &\equiv 0 \mod 71. \end{aligned}$$

并对以这些式子作为特款的一般结果给出证明.

126. 试确定出所有那样的三角形：其边长为互素整数而某个角是另一角的两倍.

127. 求解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

128. 证明

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \cdots & n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \cdots & n^n \end{vmatrix} = 1!2!3!\cdots n!\left[\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}\right].$$

129. 试证对于任何正整数 k，下面的行列式为零:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(2k+1)!} & \frac{1}{(2k+2)!} \\ 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(2k)!} & \frac{1}{(2k+1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(2k-1)!} & \frac{1}{(2k)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

130. 将一个正方形划分为 n^2 个单位正方形，象一个国际象棋盘. 棋盘上任意两条水平线与任意两条竖直线都形成一个矩形. 现我们把正方形也当作矩形，并规定每个矩形的宽度 b 小于或等于它的长度. 显然存在一个宽度为 n 的矩形，即原来的正方形. 试证存在 2^3 个宽度为 $n-1$ 的矩形，3^3 个宽度为 $n-2$ 的矩形，$\cdots$，n^3 个宽度为 1 的矩形. 并导出公式

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

131. 设不等边三角形 ABC 在 B，C 的外角平分线的长相等，证明 $\dfrac{s-a}{a}$ 是 $\dfrac{s-b}{b}$ 与 $\dfrac{s-c}{c}$ 的几何平均值.

132. 在三角形 $A_1A_2A_3$ 内截线 A_iD_i 分 A_jA_k 为比 $A_jD_i:D_iA_k=p_i:q_i$，式中 ijk 是 123 的一个循环排列. 截线 A_iD_i 与 A_jD_j 交于 P_{ko} 试求用那些 p 与 q 来表示交比

$$\frac{P_3P_2}{P_2A_1}\Big/\frac{P_3D_1}{D_1A_1}$$

的结果. 指出西瓦（Ceva）定理是它的特殊情形.

133. 设 $0,u_1,u_2,u_3,\cdots$ 为满足递推关系 $u_{n+1}=au_n+bu_{n-1}$ 的数列，记

$$f(x)=\sum_1^\infty u_n\frac{x^n}{n!}.$$

证明 $f(x)=-e^{ax}f(-x)$.

134. 试证

$$\operatorname{arcctg}1=\operatorname{arctg}2+\operatorname{arcctg}5+\operatorname{arcctg}13+\operatorname{arcctg}34+\cdots$$

式中这些整数是菲波那契数列中相间出现的那些数，它们还满足递推式 $u_{n+1}=3u_n-u_{n-1}$.

135. 试在 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 上确定一点 P，使得在这点的切线和法线分别是 $b^2x^2-a^2y^2=-a^2b^2$ 的法线和切线，并且如果把第一条双曲线及其共轭曲线当成统一的曲线: $(b^2x^2-a^2y^2)^2-a^4b^4=0$，则可作一矩形既内接于又外切于此统一曲线.

136. 人们对于全体正实数系定义一种新的“乘法”为 $[a,b]=a^b$. 试分别找出对于这种“乘法”满足

（I）交换律 $[a,b]=[b,a]$.

（II）结合律 $[a,[b,c]]=[[a,b],c]$.

（III）右侧或左侧分配律

$$[(a+b),c]=[a,c]+[b,c],[c,(a+b)]=[c,a]+[c,b].$$

的所有正有理数.

137. 设 $f(t)$ 是一个单值的复值函数，对于 t 与 s 的所有实数值，满足函数关系式

（1）$e^{iks}f(t)=f(t+s)-f(s)$，式中 k 是一个实常数 $\neq 0$. 试证

（2）$f(t)=\dfrac{C(e^{ikt}-1)}{ik}$（$C$ 为常数）.

附注 应注意到当 $k=0$ 时（1）与（2）分别简化为 $(1')f(t+s)=f(t)+f(s)$ 与 $(2')f(t)=Ct$. 仅当对 $f(t)$ 附加某种假定，例如在某点邻域的有界性时，可以认为（$1'$）蕴涵（$2'$）.

138. 给定一个实变量 x 的函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{4^n}.$$

证明存在一个不依赖于 x 的正的常数 C_1，使得

（1）

$$|f(x)|<C_1\ln\ln x, x>e.$$

并证明存在一个数列 $x_1<x_2<\cdots\to\infty$，以及一个不依赖于 x 的正的常数 C_2，使得

（2）

$$|f(x_v)|>C_2\ln\ln x, v=1,2,\cdots.$$

139. 给定复变量 z 的函数

$$f(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-z}{|a_i-z|}.$$

式中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示任意给定的复数. 试证 $|f(z)|$ 在边界上不含有 a_i 的任何区域取得其在该域上的最大值.

140. 在方程 $y=x^3+px^2+qx$ 中指出如何确定出 p 与 q 的全部整数对，使得方程 $y=0$ 有不等的整根，并且曲线上的两个转向点有整坐标（注：转向点不是拐点，而是“峰顶”或“谷底”点）.

141. 对于每个正整数 $p<n$，证明

$$1^p+2^p-3^p+4^p-5^p-6^p+7^p+8^p-\cdots+(2^n-1)^p=0$$

式中形如 m^p 的项的符号是负或正，取决于 m 是或不是紧跟着 2^{k+1} 之后的 2^k 个整数中的一个而定，这里 k 是任意整数.

142. 设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 2n$ 是那样的正整数，它们之中没有一个数能被这数列的任何别的数整除，则 $a_1 \geqslant 2^k$，这里 k 由不等式 $3^k < 2n < 3^{k+1}$ 所确定. 并证明对 a_1 的这个估值是最好的.

143. 试确定矩阵

$$V = (v_{rc}) = (\varepsilon^{(r-1)(c-1)})$$

的特征方程的根，式中 $\varepsilon = e^{2xi/n}$.

144. 求解下列偏微分方程组

$$U\frac{\partial W}{\partial x} + 2W\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad U\frac{\partial W}{\partial x} + 2W\frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

145. 令 $S = a + b + c, T = ab + ac + bc$，式中 a, b, c 是三角形的三边. 证明 $3T \leqslant S^2 < 4T$. 又问，对于一个四面体的类似不等式是什么？

146. 设 C 是一简单闭可求长平面曲线，P 是 C 内部任意一点.

（a）证明在 C 上存在两点 A 与 B 使得 P 平分弦 AB.

（b）若曲线是不可求长的，上述性质仍然保持真确吗？

147. n 维空间中的一个单纯形的顶点是 $O, P_1, P_2 \cdots P_n$. 设 $OP_i = (a_{ii})^{\frac{1}{2}}$, 且 OP_i 与 OP_j 之间的角的余弦为 $a_{ij}/(a_{ii}a_{jj})^{\frac{1}{2}}(i, j = 1, 2, \cdots n)$. 试证外切超球面的半径 r_n 由

$$r_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ii}a_{jj}/4|a_{ij}|$$

给出. 其中 A_{ij} 是对称行列式 $|a_{ij}|$ 中 a_{ij} 的余子式.

148. 试证明：若 $0 \leqslant \alpha \leqslant x_1 \leqslant x_2$ 且 n 为正整数，则

$${x_2}^{1/n} - {x_1}^{1/n} \leqslant (x_2 - \alpha)^{1/n} - (x_1 - \alpha)^{1/n}.$$

149. 一人有 m 枚硬币而另一人有 n 枚，他们抛掷硬币比赛，直到一人赢了全部的硬币，求结束这场比赛所需要的平均抛掷次数.

150. n 个相继的正整数的乘积（n 是奇数），可被它们的和除尽，除非 n 为素数. 这 n 个整数的算术平均值可被 n 除尽. 试检验 n 是偶数的情况.

151. 从一正 n 边形的顶点中选择三点作为一个三角形的顶点，证明可能作出的本质上不同的三角形的个数是最接近 $n^2/12$ 的一个整数.

152. 如果 $(1+x)^n/(1-x)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ 证明

$$a_0 + a_1 + \cdots\cdots + a_{n-1} = \frac{n}{3}(n+2)(n+7)\cdot 2^{n-4}.$$

153. 对于任何给出的固定整数 m，求 B 的值使得 B^2+m 是一个完全平方.

154. 如果一个圆的半径是任意一个奇素数 P，刚好有两个不同的原始毕达哥拉斯三角形外接于此圆，对于每一对这样的三角形，求证:

（A）它们的最短边相差 1;

（B）它们的斜边与相应的较长的直角边的比分别大 1 和 2;

（C）它们的周长的和是一个完全平方数的六倍;

（D）当 p 无限增加时，它们的最小的角度的比趋于极限 2;

（E）当 p 无限增加时，其面积的比趋于极限 2;

（F）较小的三角形总能放在较大的一个的里面而不相接触.

155. 在中学的几何教材中和其他地方，人们常遇到这样的说法:“在一张折叠纸中的折痕是直的理由是因为两个平面的交线是直线，这是一种谬论，正确的理由是什么?

156. 证明前 n 个正整数的积 $(1,2,\cdots,n)$ 能被它们的和 $(1+2+\cdots+n)$ 除尽，当且仅当 $n+1$ 不是一个奇素数.

157. 证明如何用直线切法把一个正六边形分割成件数最少的可能的小块，使得能重新拼成一等边三角形（具有同样的面积）.

158. 如果 n,r 及 a 是正整数，则同余式 $n^2 \equiv n(\bmod 10^a)$. 显然蕴含着 $n^r \equiv n(\bmod 10^a)$（当这一个数只有 a 位数它称为一个自同构数），问对于 r 的哪些值使 $n^r \equiv n(\bmod 10^a)$，蕴含着 $n^2 = n(\bmod 10^a)$?

159. 三次函数 $y = x^3+ax^2+bx+c$ 的图形在三个不同的点穿过 x 轴，其中两点是 A 和 B，直线 AP 及 BQ 与曲线相切于曲线凸起处，切点为 P 和 Q，证明距离 AB 同由 P 到 Q 的水平距离的比值是常数.

160. 求方程

$$(x^2-x+1)^3/x^2(x-1)^2 = \frac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2}.$$

的全部根.

161. 设 $P_1, P_2 \cdots P_{n+2}$ 是 n 维空间中的 $n+2$ 个点，其中没有点位于同一直线上，用符号 $[P_{i1}P_{i2}\cdots P_{is}]$ 代表在其内部包含上面诸点的最小凸多面体. 证明：如果 $n=2,3$, 则总存在下标 i,k，使得 $[P_iP_k]$ 不是多面体 $[P_1P_2\cdots P_{n+2}]$ 的一条边. 如果 $n>3$，则此说法不真.

162. 一条狗系在一条长 L 的绳上，绳子另一端固定在一堵高为 h 的、顶部光滑的篱笆的另一边离顶部 a 个单位的地方 $L>h+a$，讨论狗能够行动的区域的形状和范围；并且求出它的面积.

163. 有一块上面钉有 k 个木钉的板子和一套垫圈、有 n 个，其中任两个大小上都不一样，这些垫圈套在一个钉子上，而且上一个垫圈都比下面一个小，现在如果一次动一个垫圈，且总保持上面的比下面的小的条件，那么把这 n 个垫圈移到另一个钉子上去最少应移动多少次？

当 $k=3$ 时，在 Ball 的《数学游戏》一书中这问题叫做“河内塔”，其答案是 2^n-1.

164. 证明

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x}{1-x} & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{x^2}{1-x^2} & \dfrac{x}{1-x} & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{x^3}{1-x^3} & \dfrac{x^2}{1-x^2} & \dfrac{x}{1-x} & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{x^r}{1-x^r} & \dfrac{x^{r-1}}{1-x^{r-1}} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \dfrac{x}{1-x} \end{vmatrix} = \frac{r!x^{r(r+1)/2}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^r)}.$$

165. 一抛物线的三条切线所成三角形的外接圆通过焦点，求证圆的直径 d 由 $d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=a$ 给出，这里 α、β、γ 是切线同抛物线 $y^2=4ax$ 的轴构成的角度.

166. 函数 $f(x)$ 由关系式

$$\begin{aligned} f(x) &= x\sin(1/x), \text{当} x>0, \\ &= 0, \qquad\quad \text{当} x=0. \end{aligned}$$

定义，证明对于 $0\leqslant x_0\leqslant 1, 0\leqslant x_1\leqslant 1$, 当且仅当 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$|f(x_1)-f(x_0)|/|x_1-x_0|^a$ 是有界的.

167. 一人正站在两条垂直的交叉路的交会处，他的狗在其中一条路上与交会处的距离为 a 处，正望着他，在给定的某一瞬间，人开始以速度 v 沿另一条道路行走，而狗则开始面朝着它的主人以速度 $2v$ 奔跑，试确定其追踪曲线？

168. 设三个元素 a、b、c 次序一定，不假定结合律成立，作两个乘积，即 $(ab)c$ 和 $a(bc)$. 类似地，四个元素 a、b、c、d 给出 $N_4=5$ 个乘积 $[(ab)c]d$、$[a(bc)]d$、$a[(bc)d]$、$a[b(cd)]$、$(ab)(cd)$，试求 i 个因子乘积的个数 N_i 的一般表示式.

169. 依什么样的方向冲击台球，才可能使台球经过给定的偶数次回弹后，仍回到原来的位置？忽略球的自旋.

170. 如果两个球体互切且切于一平面，又 a,b 是它们的半径，求证：能在它们之间通过的最大球体的半径 x 由公式

$$x^{-\frac{1}{2}}=a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}$$

给出.

171. 有两堵相距为 d 的平行直立墙，两墙间的地面是水平的，另有长度分别为 a 和 b 英尺 $(a>b)$ 的两架梯子，每一架都有一端抵在一堵墙脚上，而另一端靠在另一堵墙上，在地面高度为 c 英尺处交叉. 证明其整数解是由

$$ka=(su+tv)(s-t)(u+v)$$

$$kb=(sv+tu)(s-t)(u+v)$$

$$kc=(su-tv)(sv-tu)$$

$$kd=2(stuv)^{\frac{1}{2}}(s-t)(u+v)$$

给出，其中 s,t,u,v 是满足 $u>v,sv>tu$ 和 $stuv$ 是一个完全平方这样三个条件的任意正整数，k 是 4 个方程的右端的最大公约数. 在 a,b,c,d 全部是奇数时最简单的特解是什么？

172. 证明同余式

$$\binom{2p-1}{p-1}\equiv 1(\bmod p^2)$$

是 p 为一奇素数的充要条件.

173. 一件高大矩形家具，长为 a 宽为 b，沿一条宽为 c 的过道移动，且经过一门进入邻室，门宽 d 刚好可使柜通过，如果我们忽略墙壁的厚度，由相似三角形的比容易看出 $d=ab/c$. 如果墙具有厚度 h，求 d 用 a,b,c 和 h 表示的值.

174. 如果 p 是任一奇素数，证明分数 $1/p$ 的小数展式有 $p-1/2$ 位数字的循环，或循环的位数是 $\dfrac{p-1}{2}$ 的因数，当且仅当 $p=\pm 3^K(\bmod 40)$.

175. 证明不存在素数 p，使得如果 $n>1$. $p^n+1=2^m$，且不存在素数 p 使得当 $n>2$，$p^n-1=2^m$.

176. 在美国现行选举制度下，一个总统能被选上所需的最少的选民票是多少？

假定：N 是选民票的总数，每个州的选民票与选举人票成正比（这个你得去查看）；并且只有两个候选人.

177. 证明，在矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

的任何幂中，在对角线中有两个元素会相同，并证明对于任何矩阵 (a_{rs}) 其中 $a_{r1}=a_{2r}, a_{1r}=a_{r2}(r>2)$ 且 $a_{11}=a_{22}$，同样的结论成立.

178. 设 $s(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 是调和级数前 n 项的和，大家熟知的 $s(n)$ 的一个形式上并不包含 n 项的和的表示式是积分

$$\int_0^1 \frac{u^n-1}{u-1}du.$$

我们想把 $s(n)$ 表示成为形式 $s(n)=f^{(n)}(0)$，求用一个初等函数的积分表示的 $f(x)$ 的表达式.

179. 已知三角形 ABC，其角 $A<B<C$，试证明根据

$$1-\frac{\sin A}{\sin B} \gtreqqless 2\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)\tan^2\left(\frac{B}{2}\right).$$

（其中 B 可用 C 代替）时，而恰有 $1,2,3$ 条直线段平分三角形的周长和面积.

如果 $B=C$，则根据 $A \lesseqqgtr A_0$，（其中 $\sin(A_0/2)=\sqrt{2}-1$），而有 $1,2,3$ 条具上述性质的直线.

180. 证明对于一实数或复数 x，$|x|\leqq 1$，不等式

$$\frac{|x|}{1+|x|}\leqq|\log(1+x)|\leqq\frac{|x|(1+|x|)}{|1+x|}.$$

成立.

181. 对于已知三角形 ABC，作第二个三角形 $A'B'C'$，其中 AA',BB',CC' 是高，且

$$\frac{AA'}{BC}=\frac{BB'}{CA}=\frac{CC'}{AB}=k.$$

（1）证明两个三角形有相同的形心，

（2）检查三角形 $A'B'C'$ 的面积的变化，

（3）对于 k 的什么值，两个三角形有相同的 Brocard 角，

（4）若 $k=\pm1$，试证明在三角形 $A'B'C'$ 的各边上向外或向内所作的正方形的中心分别是三角形 ABC 的顶点.

182. 设 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为自变量而次数由其下标表示的对称多项式，且它们代数无关. 如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是变量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的任意一个已知的对称多项式，试证明它能表示为一个 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的多项式.

183. 求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(n-1)k]!/(nk)!$$

的和，其中 k 是大于 1 的任一整数.

184. 设 $f(x)$ 是具有 n 个不同的实根 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的 n 次多项式；λ_i 是曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_i$ 处的斜率的倒数；$\rho_j(j=1,2,\cdots,n-1)$ 是曲线在位于 x_j 与 x_{j+1} 之间的临界点处的曲率的代数半径. 试证明：

（a）当 $n>1$ 时，则有 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=0$，

（b）当 $n>2$ 时，则有 $\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_{n-1}=0$.

185. 给函数

$$f(n)=n\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_k}\right)$$

一个解释，其中 $f(n)$ 是把欧拉 ϕ 一函数中的负号换成正号后得到的函数.

186. 如果 $x^n-c_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^nc_n$ 的根是变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，试求 $c_n,c_{n-1},\cdots,c_1$ 关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的雅可比行列式.

187. 众所周知，$f_1=f_2=1,f_{j+1}=f_{j-1}+f_j$ 所定义的黄金分割数（斐波那契分割数）产生了一个难题，在这个难题中，一个边为 f_n 的正方形切成四块，这四块近似地可以重新排列而形成一个 $f_{n-1}\times f_{n+1}$ 的矩形. 试证明同样的四块能够重新排列形成一个两个矩形 $f_{n-1}\times 2f_{n-2}$ 所构成的由矩形 $f_{n-4}\times f_{n-2}$ 联结而成的图形，其面积的误差也是一个单位.

188. 设

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{pmatrix}$$

是由非零元素构成的两个矩阵，第二个矩阵的元素是第一个矩阵对应元素的余子式. 试由

$$关系式\begin{vmatrix} x_1^{-1} & y_1^{-1} & z_1^{-1}\\ x_2^{-1} & y_2^{-1} & z_2^{-1}\\ x_3^{-1} & y_3^{-1} & z_3^{-1}\end{vmatrix}=0导出$$

$$关系式\begin{vmatrix} X_1^{-1} & Y_1^{-1} & Z_1^{-1}\\ X_2^{-1} & Y_2^{-1} & Z_2^{-1}\\ X_3^{-1} & Y_3^{-1} & Z_3^{-1}\end{vmatrix}=0.$$

189. 试证明 $\sqrt[\sqrt{-1}]{\sqrt{-1}}\approx 23\dfrac{1}{7}$.

190. 求一个 n 位数 $N_0 = a_1a_2\cdots a_n(a_1 \neq 0)$，使得如果我们把左边的 k 个数移至右边 $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$，那么这样获得的 $n-1$ 个数:

$$N_1 = a_2a_3\cdots a_na_1,$$

$$N_2 = a_3a_4\cdots a_na_1a_2,$$

$$\cdots$$

$$N_{n-1} = a_na_1a_2\cdots a_{n-1}$$

都是 N_0 的倍数.

191. 证明：如果 S_1 和 S_2 是包含于单位正方形之内的两个正方形，它们没有公共点，则它们的边的和小于 1. 下面的命题似乎为真：如果有 k^2+1 个正方形包含在单位正方形内，它们之中任意两个没有公共点，则这些正方形的边长之和小于 k.

192. 已知三角形 ABC, 试证明 C 的内角、外角的平分线，边 AB 和它的垂直平分线，以及过 A 点 AC 的垂线与过 B 点 BC 的垂线都是一抛物线的切线，并找出它的焦点.

193. 微分算子 D^2+1 可以用多种方法进行因式分解，例如它可以写成:

$$(D+\cot x)(D-\cot x),$$

或

$$(\sec x\cdot D)(\cos x\cdot D+\sin x),$$

或

$$(\sin x\cdot D+2\cos x)(D\csc x).$$

试证明将微分算子 $(D+a)^2+b^2$ 表示为两个实一阶微分算子的乘积的最一般的方法可由下面公式给出:

$$(D+a)^2+b^2 = \frac{1}{r}\left[D+a-b\tan(bx+c)-\frac{r'}{r}\right]\cdot r[D+a+b\tan(bx+c)],$$

其中，a, b, c 是实数，r 是 x 的可微函数.

194. 求 $2n$ 阶行列式的表达式. 此行列式为

$$\begin{vmatrix} \theta I_n & A_n \\ A_n & \theta I_n \end{vmatrix}$$

其中 θI_n 是主对角线上有变量 θ，其他地方为零的 n 阶方阵；A_n 是 n 阶对称方阵，它的主对角线上的元素为 a，邻近主对角线上、下二平行线上的元素为 1，其他地方为零.

195. 证明：如果 A 是一个固定的正定埃尔米特矩阵，X 是一个可变的非负定埃尔米特矩阵（其秩等于指数），则行列式 $|A+X|$ 的最小值是 $|A|$，并且，当且仅当 $X=0$ 时达到.

196. 证明可由下面式子定出欧拉常数 γ:

$$\gamma=\sum_{r=2}^{\infty}(-1)^r\frac{g_r}{r},\quad g_r=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r},\quad \gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\log n\right).$$

197. 如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不同的复数，$(n>1)$，使得没有两个相差 π 的倍数. 试证明

$$\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1,i\neq k}^{n}\cot\left(a_k-a_i\right)=\sin\frac{n\pi}{2}.$$

198. 如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是这样的 n 个相异复数，$(n>1)$，即它们之中没有两个相差是 π 的倍数. 试证明:

$$\sum_{j=1}^{n}\cot a_j\prod_{i=1,i\neq j}^{n}\cot\left(a_j-a_i\right)+(-1)^n\prod_{i=1}^{n}\cot a_i=\sin\frac{(n+1)\pi}{2}.$$

199. 一个椭圆的所有其形心在该椭圆中心的内接三角形有相同的面积，此面积为内接三角形的最大可能面积；一个椭圆的所有其形心在该椭圆中心的外切三角形有相同的面积，此面积为外切三角形的最小可能面积. 试将这两个问题加以证明.

200. 试证明可作一个四面体，使它的每条棱的长度，每个面的面积和它的体积都是整数.

201. 证明对 x 的每一个整数值，$\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{15}x$ 是一整数.

202. 考虑一个容积为 $a\times b\times c$ 的长方体，此长方体由 abc 个单位立方体组成. 假设所有这些立方体的棱由某些材料丝来代替，公共棱共有同一材料丝. 试证明由材料丝网络所形成的外表面的亏格是 $p=2abc+bc+ca+ab$（即它拓扑等价于一个具有环把 p 的球）.

203. 哲学家柏拉图（Plato）在他的《法律篇》第五卷中，讨论一块土地的分配时，产生了这样一个问题：寻找一个数，此数能被 1 至 10 的每个整数除尽，并且他选择了 5040. 试证明，一般地，如果 m 和 n 是正整数，且 $n<p$，其中 p 是比 m 大的最小素数，则除 $m=3$ 外，$m!$ 能被 n 除尽.

204. 设 a,b 和 n 是满足 n 能整除 a^n-b^n 的任意正整数. 试证明 n 能整除 $(a^n-b^n)/(a-b)$.

205. 证明欧拉常数 γ 由下式给出:

$$\gamma=2\left[1-\log 2-\frac{\tau_3}{3}-\frac{\tau_5}{5}-\cdots\right].$$

其中

$$\tau_k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^k}.$$

206. 三角形有边 $x-1, x, x+1$，以 x 为底，h 为高，其面积为 A，其中 x, h，A 是整数. 下表是前六个这样的三角形

n	h	x	A
0	0	2	0
1	3	4	6
2	12	14	84
3	45	52	1170
4	168	194	16296
5	627	724	226974
6	•	•	•

那么，对满足已知条件的所有三角形下列关系：

$$h_{n+2} = 4h_{n+1} - h_n, \quad x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n, \quad A_{n+2} = 14A_{n+1} - A_n.$$

成立吗?

207. 求小于 100 的基数，使得对于它，数 2101 是完全平方数.

208. （1）设 n 个已知点的集合具有性质：连接它们之中任意两点的直线必过这个集合中的某个第三点. 试证明此 n 点位于一条直线上.

（2）给定 n 点，此 n 点不都位于同一直线上，试证明若联结它们之中的每两个点，则至少获得 n 条不同的直线.

209. 试证明下面等式成立:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\Gamma(x)} = \int_0^1 \left[1 + \frac{e}{x} - \frac{e}{1!(x+1)} + \frac{e}{2!(x+1)} - \cdots\right] \frac{dx}{\Gamma(x)}.$$

210. 证明：若 $0 < x < 1$，则

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - x^{2n-1}\right) = 1 \Big/ \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[x^{k(k+1)/2} \Big/ (1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\cdots\left(1-x^k\right)\right]\right\}.$$

211. 设 ρ 表示三角形 ABC 内切圆的半径，r 表示外接圆的半径，m 表示最长的斜高. 试证明

$$\rho + \gamma \leqq m.$$

修正：排除钝角三角形的情况.

212. 求证下式成立:

$$e^{x}=\frac{\left(1-x^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1-x^{5}\right)^{\frac{1}{5}}\ldots}{(1-x)\left(1-x^{6}\right)^{\frac{1}{6}}\left(1-x^{10}\right)^{\frac{1}{10}}\cdots}$$

$|x|<1$，等式右端的分式中，分子中的 x 的指数是含奇数个不重复素数因子的整数，而在分母中 x 的指数含偶数个不重复的素数因子.

213. 已知等边双曲线（H）和过（H）的中心 ω 的圆（O），求证存在无穷多个外切于圆而内接于（H）的三角形的充要条件是圆的中心位于（H）上.

提示：考虑这些三角形的边的包络.

214. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$ 是正多边形的顶点，O 是正多边形内的任意一点. 试证明在角 A_iOA_j 中至少有一角满足关系:

$$\pi\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \leqq A_iOA_j<\pi.$$

215. 已知三个级数如下:

$$\begin{aligned}
&z-\frac{z^{5}}{2 \cdot 4 \cdot 5}+\frac{z^{9}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}-\frac{z^{13}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13}+\cdots, \\
&\frac{z^{3}}{2 \cdot 3}-\frac{z^{7}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}+\frac{z^{11}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11}-\frac{z^{15}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15}+\cdots, \\
&\frac{z^{2}}{1 \cdot 2}-\frac{z^{6}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}+\frac{z^{10}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}-\frac{z^{14}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 14}+\cdots.
\end{aligned}$$

试证明第 $1,2$ 个级数的平方和等于第 3 个级数的两倍.

216. 设 $g_1, g_2, g_3 \cdots$ 是使下列不等式:

$$0<g_p<1, \quad (1-g_p) g_{p+1}>\frac{1}{4}(p=1,2,3, \cdots)$$

成立的任何数. 证明: $\lim\limits_{p \rightarrow \infty} g_p=\frac{1}{2}$.

217. （a）证明具有相同不变直径 d 的所有闭曲线具有相同的周长 πd.

（b）具有不变直径 d 的闭曲线所围成的最小面积是什么？

（这样的“不变宽度曲线”接触两条距离为 d 的按任一方向画出的平行直线）.

218. 某个商店办了下面一种游戏. 游戏时，玩的人先交付 10 美分，如果他赢了，便能得到 1 美元的商品.

这游戏是在每次投掷十颗骰子的五次投掷中，如果由玩的人在赛前所指定的点数的面出现了 14 次或更多次，那他就赢了；玩的人有一条附加的有利条件：即在十颗骰子的第一次投掷中，他可以把出现次数最多的面当作就是他所选择的面.

此问题是：将赢的理论概率与商店提供的机遇比较.

219. 证明

$$D(n)=\begin{vmatrix}(1,1)^{\lambda}, & (1,2)^{\lambda}, & \cdots, & (1,n)^{\lambda}\\ (2,1)^{\lambda}, & (2,2)^{\lambda}, & \cdots, & (2,n)^{\lambda}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (n,1)^{\lambda}, & (n,2)^{\lambda}, & \cdots, & (n,n)^{\lambda}\end{vmatrix}$$
$$=(n!)^{\lambda}\left(1-\frac{1}{2^{\lambda}}\right)^{[n/2]}\cdot\left(1-\frac{1}{3^{\lambda}}\right)^{[n/3]}\cdot\left(1-\frac{1}{5^{\lambda}}\right)^{[n/5]}\cdots$$

其中 (i,j) 表示整数 i,j 的最大公因数.

220. 假设关于非负整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的两个 n 元对称函数 $M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $S(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 定义于下:

$$M(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv M'(x_1)M'(x_2)\cdots M'(x_n)$$

在这个恒等式中，$M'(x)=1,-1,0$，对应于 $x=0,x=1,x>1$;

若 $S_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 j 次初等对称函数，则

$$S(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv 1+\sum_{j=1}^{n}jS_i(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

试证明 $\sum M(x_1-b_1,\cdots,x_n-b_n)S(b_1,\cdots,b_n)$ 等于集合 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中正整数的个数.

如果 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，则和等于 1，和式中的 b_i 取所有使得 $0\leqslant b_i\leqslant x_i(i=1,2,\cdots n)$ 的整数.

221. 将 n 个元素分为 r 个没有公共元素的环形排列，把它们写成乘积的形式，以 ${}_nP_r$ 表示其排列数，例如 ${}_4P_2=11$. 又设 ${}_nQ_r$ 是 n 个不同元素分成恰好 r 类的不同分类数，例如 ${}_4Q_2=7$. 证明

（1）${}_nP_1x+{}_nP_2x^2+\cdots+{}_nP_nx^n=x(1+x)(2+x)\cdots(n-1+x)$.

（2）${}_nQ_1x+{}_nQ_2x(x-1)+\cdots+{}_nQ_nx(x-1)\cdots(x-n+1)=x^n$.

222. 试证明下式成立:

$$\sum_{t=0}^{n}(-1)^{n+t}\frac{t^{n+4}}{t!(n-t)!}=\frac{(n+4)(n+3)\cdots n}{6!8}[15n^3+30n^2+5n-2].$$

其中 $n\geqq 0$，等式中的每个数都是非负整数. 如果 n 是负整数，右边是整数，那么在这种情况下，等式的意义是什么?

223. 考虑由 n 阶矩阵所组成的集合，矩阵的元素是正整数或零. 设第 i 行的元素的和为 $r_i,(i=1,2,\cdots,n)$，第 j 列元素的和为 $c_j,(j=1,2,\cdots,n)$. 对于指定的 r_i 和 c_j（正整数或零），有

$$\sum_{i=1}^{n}r_i=\sum_{j=1}^{n}c_j.$$

试问：主对角线上元素的和的最小最大值是什么？即最小最大追迹是什么？

224. 如果一架飞机以常速飞行，那么它沿（关于地面）水平面上一闭曲线飞行所花的时间，当没有风时总比有任何不变风速的风时要少.

225. 设 a, b, c 为整数，且 $b \neq 0$，d 和 f 分别为 a 与 b，c 与 b 的最大公约数，若 $a \not\equiv \pm d \pmod b$ 和 $c \not\equiv \pm f \pmod b$，则存在无穷多个整数 k，使得方程 $ax + byx + cy = k$ 没有整数解.

226. 以常值 d 为直径的闭曲线可以围成的最小面积是什么？

227. 证明离 $n!/e$ 最近的整数是 $n-1$ 的倍数.

228. 设 X_i, Y_i, Z_i 是一般三阶行列式 D 中 x_i, y_i, z_i 的余因子. 其中

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

证明

$$\begin{vmatrix} X_2X_3 & Y_2Y_3 & Z_2Z_3 \\ X_3X_1 & Y_3Y_1 & Z_3Z_1 \\ X_1X_2 & Y_1Y_2 & Z_1Z_2 \end{vmatrix} = -D^2 \begin{vmatrix} x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 \\ x_3x_1 & y_3y_1 & z_3z_1 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 \end{vmatrix}.$$

229. 求一个最小正整数，使得它的 $1/2$ 是一个平方数，$1/3$ 是一个立方数，$1/5$ 是一个 5 次方数.

230. 设 $f(x)$ 和 $g(n)$ 为由下列三个条件所确定的两个自然数序列：

（1）$f(1) = 1$，

（2）$g(n) = na - 1 - f(n)$，a 是一个大于 4 的整数.

（3）$f(n+1)$ 是与 $2n$ 个数：$f(1), f(2), \cdots, f(n); g(1), g(2), \cdots, g(n)$ 不同的最小自然数.

证明存在常数 α 和 β 使得 $f(n) = [\alpha n]$，$g(n) = [\beta n]$，照例，方括号表示最大整数函数.

231. 已知整数 $x \leqslant n^2/4$，x 没有大于 n 的素数因子. 证明 $n! \equiv 0 \pmod x$.

232. 设 p 与 q 是两个已知的正整数，并且定义

$$\begin{aligned} S_{p,q} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2p} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \cdots \\ &\quad - \frac{1}{2q+1} + \frac{1}{2p+2} + \cdots + \frac{1}{4p} - \frac{1}{2q+3} - \cdots - \frac{1}{4q+1} + \cdots. \\ P_{p,q} &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2p}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2q+1}\right)\left(1 + \frac{1}{2p+2}\right) \cdots \end{aligned}$$

我们把熟悉的级数

$$S_{1,1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots=1-\log 2.$$

进行重新排列，使得其 p 个正项构成的部分与 q 个负项构成的部分交替出现就得到上面级数 $S_{p,q}$，而第二个无穷乘积 $P_{p,q}$ 是把下面的无穷乘积相应地重新排列而成:

$$P_{1,1}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots$$

直接证明 $P_{p,q}=(p/q)^{1/2}$，并因此得出熟知的结果

$$S_{p,q}-S_{1,1}=\log\left(\frac{p}{q}\right)^{1/2}.$$

233. 求一个实数序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 使得 $\sum_1^\infty a_n$ 收敛，$\sum_1^\infty a_n^8$ 发散，$\sum_1^\infty a_n^5$ 收敛. 更一般地，设 C 是任意给定的（有限的或无线的）正整数类，则存在适合 C 的实数序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，使得对于 $l=1,2,3\cdots$ 级数

$$a_1^{2l-1}+a_2^{2l-1}+\cdots+a_n^{2l-1}+\cdots$$

收敛或发散对应于 l 是否属于 C.

234. 设 $p_1<p_2<\cdots<p_n<\cdots$ 是相继素数，试证明，除 $p_n=3$ 外 $\dfrac{p_n!}{p_n(p_n+1)(p_{n+1}-1)}$ 总是整数.

235. 证明下面二次式系数的三角展开式:

$$\frac{N!}{\left(\frac{N+x}{2}\right)!\left(\frac{N-x}{2}\right)!}=\frac{2^N}{N}\sum_{m=1}^{N}\left(\cos\frac{m\pi}{N}\right)^N\cos\frac{m\pi x}{N}.$$

其中 $-N<x<N$.

236. 一条笔直的道路上，在 a 英里长的一段上有 n 个行人. 试问任意二人相距都不小于 b 英里的概率是多少?

237. 设 $X_n,n=0,1,2,\cdots$，是欧几里德三维空间中的向量序列，对所有的 n，$|X_n|>\delta$，其中 δ 是固定的正常数，绝对值符号表示向量的长度. 试证明：当 $n\to\infty$ 时，

$$|X_n|+|X_0|-|X_n+X_0|\to 0$$

成立，当且仅当存在一个正的标量 a_n 的序列，使得当 $n\to\infty$ 时，

$$|a_nX_n-X_0|\to 0.$$

238. 证明或否定以下包含余弦级数的断语：如果 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 是实常数的序列，又如果 L_n 是位于区间 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ 上的函数

$$f_n(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx$$

的图形的长度，则 $L_1 \leqq L_2 \leqq L_3 \leqq \cdots$.

239. 求下面级数的和：

$$\sum_{r=1}^{2n-1} (-1)^{r-1} \frac{r}{\binom{2n}{r}}.$$

240. 证明每个元素为实数，其绝对值不大于 1 的六阶行列式不可能有大于 160 的值.

241. 由米妮弗夫人提出的问题："她把每一种关系看作一对相交圆. 初看起来，这样的圆似乎重叠得越多关系就越好，但并非如此，重叠超出了某一点的范围，报酬递减律就会起作用，并且任一方都没留下足够的资源来丰富共同的生活. 她认为，只有当两个外面的新月的面积之和精确地等于在中间的一块（重叠部分）所形成的叶形的面积时，关系就几乎达到完美. 为了达到这一点，在理论上应该存在某个颇为简洁的数学公式；当然，在生活中毫无可能."

对于两个已知半径的圆，讨论上面问题有唯一解的可能性.

242. 一个重球，轻轻地放入装满了水的瓶中，这瓶的形状是截下的旋转抛物面，瓶的尺寸已知. 问球的半径为多少时排水量最大？

243. 试问当 n 为什么值时，$(a+b)^n$ 仅产生奇数系数？

244. 求 n 阶对称矩阵 $A = ||a_{ij}||$ 的逆矩阵，其中 $a_{ij} = i/j, i \leqq j$.

245. 假设一个多面体的顶点代表我们想要去的地方，而多面体的棱代表只能走的路线. 汉密尔顿（Hamilton）考虑了在一次单身旅行中无重复路线地参观所有地方的问题.（见例：w. w. R. Ball 的"数学漫话与随笔".）

对于五边形的十二面体，这是容易解决的问题，试证明对于菱形的十二面体是不可能解决的问题.

246. 有十二枚硬币，它们的外表完全一样，但其中有一枚是伪币，它的重量与真币的重量不一样. 现有一个灵敏的天平，没有法码，要求秤量不超过三次就能发现这个伪币，并确定它较真币轻还是重. 问，应该怎样秤？

247. 试确定一个截平面，它被限制在一个四面体的三个面内，且将此四面体的表面和容积分成相等的部分，并证明这平面通过对内接球的中心.

248. 设 $a<b$ 是给定的数，且设对于 $a\leqslant t\leqslant b, f(t)$ 有定义. 连续，非负和严格递增，根据积分中值定理，对于每一个 $p>0$，必定存在唯一的数 $x_p, a\leqslant x_p\leqslant b$，使

$$f^p\left(x_p\right)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(t)dt$$

求 $\lim\limits_{p\to\infty} x_p$.

249. Stone 把满足方程 $x^2=x$ 的所有元素的环称为一个布尔环，证明在满足 $x^2=\pm x$ 的一个环是布尔环或者是布尔环和三个元素的加罗华域的直接和.

250. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$ 是正多边形的顶点，且设 O 是它内部的任意一点，证明：至少有一个角 A_iOA_j 满足关系

$$\pi\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\leqslant A_iOA_j\leqslant\pi.$$

251. 已知 N 个数 a_m 满足 N 个方程

$$\sum_{m=1}^{N}\frac{a_m}{m+n}=\frac{4}{2n+1}, n=1,2,\cdots,N$$

证明

$$\sum_{m=1}^{N}\frac{a_m}{2m+1}=1-\frac{1}{(2N+1)^2}.$$

252. 已知一固定的正整数及定义于正整数上的一个负值函数 $f(n)$，当 $n_1\equiv n_2 \pmod k$ 时，$f(n_1)=f(n_2)$；对一切 n，$|f(n)|\leqslant 1$；对于 $(n,k)>1, f(n)=0$，又 $\sum\limits_{n=1}^{k} f(n)=0$. 证明:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n}\right|<\log k.$$

253. 设 $a_1<a_2<\cdots<a_k\leqslant n$. 是 k 个正整数：这里 $k>[(n+1)/2]$，那么存在 $a_i+a_j=a_r$.

254. 试证：对于所有的 $a\leqslant 1$ 的值和任意的 b 值，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-a}\cos(b\log n)$ 发散.

255. 设给出了平面上的五个点. 证明，从中可以选取四个点确定一个凸四边形.

256. 设 $a_1<a_2<\cdots<a_n\leqslant 2n$ 是 n 个正整数，其中任意两个数的最小公倍数大于 $2n$，则 $a_1>[2n/3]$.

257. 一个猎人在一个未勘察过的叫做“野盆地”的地区迷了路. 不过他有一个指南针，而且在两个距离很远的山峰上有两所可见的点了火的护林站 A 和 B，他又知道自己住处 O 到这两点的方位. 这猎人从一个观测点 C

测得了 A 与 B 的方位，他走到不远的另一个观测点 D，从那里他又测得了 A、B、C 的方位. 不知怎么的，他突然悟到这七个方位应能使他找到回家的方向，即从 D 点到 O 点的方位.

试证明，若他有：（1）数学用表或（2）直尺，此时，他可将指南针作分度仪使用. 这猎人的问题便能获得解答.

258. 如果 a、b、c、R 是一些整数，它们满足：$a^2+b^2+c^2=R^2$. 试求下列联立方程组的整数解.

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

$$ax+by+cz=0$$

它至少有四个解.

259. 求凸 n 边形对角线交点的个数.

260. 证明

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_n^{\infty} w(t)e^{-t}dt<\left(\frac{2}{e}\right)^n$$

其中 t 是实数，n 是正整数，$w(t)=(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)$.

261. 求下面加法中用字母表示的数字，假定不同的字母代表不同的数字

$$\begin{array}{cccccc} & F & O & R & T & Y \\ & & & T & E & N \\ + & & & T & E & N \\ \hline & S & I & X & T & Y \end{array}$$

262. 用初等分析方法证明：如果一个跑道的里侧是一个非圆形的椭圆，而跑道的宽度不变，那么跑道的外侧不是一个椭圆.

263. 计算

$$\int_0^{\infty}\frac{\log x}{e^x+1}dx.$$

264. 证明

$$\begin{vmatrix} a-x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{a}{2} & a-x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{a}{3} & \binom{a}{2} & a-x & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{a}{n} & \binom{a}{n-1} & \binom{a}{n-2} & \binom{a}{n-3} & \cdots & a-x \end{vmatrix}$$
$$=\binom{a+n-1}{n}-\binom{2a+n-2}{n-1}x+\binom{3a+n-3}{n-2}x^2-\cdots+(-1)^n x^n$$

265. 设函数 $dI^n(x)$ 的级数定义为

（1）$dI^{(n)}(x)=\int_0^x dI^{(n-1)}(t)\dfrac{dt}{t}$.

（2）$dI^{(1)}(x)=-\int_0^x \dfrac{\log(1-t)}{t}dt$.

证明对于 $|x|<\dfrac{\pi}{2}$，有

（i）$\tan x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{2n}\left[dI^{(2n-1)}(1)-dI^{(2n-1)}(-1)\right]x^{2n-1}$,

（ii）$\sec x=1+i\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{2n+1}\left[dI^{(2n)}(-i)-dI^{(2n)}(i)\right]x^{2n}$.

266. 有一种概率游戏是这样的：把从 1 到 n 的相继数写在一张桌面上，另外有 n 个圆盘，每个圆盘上写了这些相继数中的一个，把这些圆盘翻转过来使人看不见写在上面的数字，玩的人用这些圆盘随意地把桌面上的所有数字全盖住，然后，再把圆盘翻开，根据有多少个圆盘上面的数与被盖住的数相一致来计分. 现在要求导出 n 个圆盘中有 k 个盖住了相一致的数的概率的表示式.

267. 如果硬币中恰有一个是坏的，而我们又允许在秤杆天平上称 n 次. 从而分离出这个坏硬币，并且确定它是较真币重还是轻. 问硬币的枚数 A_n 最多是多少？

268. 计算定积分

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{(x^2+1/2)^2}dx.$$

269. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a.$$

就写作 $\{x_n\}\to a$. 一个函数，如果 $\{x_n\}\to a$ 时即有 $f(x_n)\to f(a)$，则说函数 $f(x)$ 是在 $x=a$Cesaro 连续的（C 连续）. 证明，如果 $f(x)$ 的形式是 $Ax+B$. 那么它在每一个 x 处是 Cesaro 连续的，且如果 $f(x)$ 即使在单独一个 $x=a$ 是 C 连续的，那么 $f(x)$ 具有 $Ax+B$ 的形式.

270. 设 m 是正整数，它的素数因子没有一个大于 n，$m\leqslant n^{(k+1)/2}$，那么 m 可表为 k 个 $\leqslant n$ 的整数的乘积；指数 $(k+1)/2$ 是最好的可能的.

271. 如果把点编号，并以 $\overline{12}$ 记从点 1 到点 2 的距离，那么

$$\begin{vmatrix}0 & \overline{12}^2 & 1\\ \overline{21}^2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=2l^2$$

这里 l 是这线段的长，把这推广到三角形和四面体. 证明：对应的行列式分别是 $-16A^2$ 和 $288V^2$. 其中 A 是三角形的面积，V 是四面体的容积.

272. “正在花园里玩耍的那些孩子是您的吗?”客人问道，“那些小孩是四家人家的”主人回答说:“我家的最多，我兄弟家的少些，我妹妹家的更少，我堂弟的最少，他们正在那里玩丢手帕的游戏呢!”接着他又说:“他们最爱玩的是棒球，但孩子的人数不够分成两个队. 说也奇怪”他沉思着说:“这四家人家的孩子的人数的乘积是我家的门牌号数，这是你进门时看到了的.”

“我马马虎虎可算得上一个数学家.”客人说:“让我试试看能不能求出各家孩子的数目”他算了一算说:“我还需要多知道一点情况，你堂弟家只有一个小孩吗?”主人答复了他的问题. 听后客人说“知道了你家的门牌号和你对我的问题的回答，我现在可以推算出每家小孩的确切数目了.”问这四家中每家有几个小孩?

273. 椭圆过由 a,b,c 表示的三点且其中心为 $(a+b+c)/3$，证明它的半轴长是

$$\left|a+\omega^{2}b+\omega c\right|/3\pm\left|a+\omega b+\omega^{2}c\right|/3.$$

其中 $\omega=(-1+i\sqrt{3})/2$.

274. 设 A'、B'、C' 是正方形 $BCA_1'A_2'$，$CAB_1'B_2'$ 和 $ABC_1'C_2'$ 的中心，这些正方形是三角形 ABC 的边朝内侧作成的，G 是三角形 ABC 的中心，V 是 Brocard 角. 如果 $\cot V=7/4$，证明:

（1）由 $A'B'C'$ 的边向内侧作的正方形的中心 A''、B''、C'' 位于过 G 的直线上.

（2）A'、B'、C' 的 Brocard 角 V' 使得 $\cot V'=2$.

（3）A、B、C 分别与 $A_1'A_2'$，$B_1'B_2'$，$C_1'C_2'$ 的中点连接的直线是平行的.

（4）从垂足三角形的重心到外接圆的心的距离等于最后的三角形的周长的四分之一.

275. 设 $f(z)=z^n+\cdots+a_n, g(z)=z^m+\cdots+b_m$. 是两个多项式，用 A 记使 $|f(z)|\leqslant 1$ 的区域且用 B 记使 $|g(z)|\leqslant 1$ 的区域，证明: A 不可能真包含 B.

276. 有 $n-1$ 个槽 $T_1,\cdots,T_{n-1}$. 每一个都装有 V 加仑的水，第 n 个槽 T_n 中装有 V 加仑的盐溶液，其中含有 M 磅的盐，液体每分钟以 g 加仑流速从 T_n 流入 T_{n-1},T_{n-1} 到 $T_{n-2},\cdots,T_2$ 到 $T_1.T_1$ 到 T_n 循环流动，t 分钟后在 T_n 中有多少盐?

277. 证明行列式

$$\begin{vmatrix}(x-1)/1 & (x^2-1)/2 & \cdots & (x^n-1)/n\\ (x^2-1)/2 & (x^3-1)/3 & \cdots & (x^{n+1}-1)/(n+1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (x^n-1)/n & (x^{n+1}-1)/(n+1) & \cdots & (x^{2n-1}-1)/(2n-1)\end{vmatrix}$$

是 $(x-1)^{n^2}$ 的常数倍.

278. 写出两个 1，然后在它们中间插入 2，然后在任意两个和数为 3 的数之间插入 3，然后又在任意两个和数为 4 的数之间插入 4，如此继续. 证明：写出的这些 n 的个数是 $\phi(n)$（$n>1$，ϕ 是 Euler 中函数）

279. 假定在球表面上画一地图，在这地图上国家是由任意三个都不共点的 n 个大圆确定的，证明：如果 n 是四的倍数，则人们不可能作每个国家去一次且只去一次的旅游. 这里我们假定不准沿着边界走，也不准在那种超过两个以上的国家的共同边界点上跨越边界.

280. $AXBZ$ 是一个铰接式菱形，它用两根相等的杆 OA, OB 与固定点 O 连接，$OCZD$ 是一个菱形，且 YC、YD 是相等的杆. 证明：当 Y 描出一个圆时，X 描出圆锥曲线.

281. 有一次，宫廷数学家领到了他一年的全部薪水，都是银元. 于是他着手将这些银元分成不相等的九堆，然后摆成一个魔正方形，国王见了，很是赞赏，但他又抱怨在这些堆中没有那一堆是一个素数. 数学家说："我只要再多九个银元，那我就能够在每堆中加一个，使魔正方形的每一堆的银元数都是素数."国王听了，仔细研究. 他发现这确是真的，正当国王打算再多给他九个银元时，站在旁边的一个宫廷小丑大声喊着："请等一下，"接着他反过来从魔正方形的每一堆中拿出一块银元，这时他们发现，在这种情况下，魔正方形的每个元素也是一个素数. 这样这小丑白得了九块银元，试问数学家收到的薪水应该是多少？

282. 确定数 N、B、B' 之间的关系，使得基底为 B 和基底为 B' 的两个计数系统中，数 N 都可以写成相同的三个数位字. 已知 B 求 B' 和 N. 当 $B=10$ 时，应用此结果.

283. 平面上有七个点，证明：我们总可以选择三个点不形成等腰三角形，对于六个点这个事实不一定成立（如果 A、B、C 在一条直线上，当 $AB \neq BC$. 我们可以定义它们不形成一个等腰三角形）.

284. 仅用直尺作一个六角形. 这六角形既有一条内接二次曲线，又有一条外切的二次曲线.

285. Lewis Carroll 曾提出下面的问题：

"两个人从 2 点到 9 点一直徒步郊游，先沿着水平道路走，然后登山，最后回到了家里. 他们的步速在水平路上每小时 x 英里，上山是 y，下山是 $2y$，求步行的路程".

在原问题中，x 和 y 是整数，若事先不知道它们是些什么整数，试推导原问题的解.

286. 如果

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right) a_k$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_n+\sigma_n\right|^a<\infty, \text{（对于某一个 } a\text{）}$$

证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的.

287. 求两个不同的原始毕氏三角形共有的最小周长.

288. 设 S 是三阶魔方的整数元素的和，而 D 是把这魔方作为行列式时的值，证明：D/S 是一个整数.

289. 对 a_1 个 1，a_2 个 2，$\cdots, a_n$ 个 n 有几种排法，使得如从开始读起，$(k+1)$ 在至少有一个 k 出现后才出现.

290. 我们知道 $2n!/n!(n+1)!$ 总是一个整数，证明：对于每一个 k 有无穷多个 n 使得 $2n!/n!(n+k)!$ 是一个整数.

291. 数列 $\{x_n\}$ 利用数 x_0 和 x_1 由递推公式定义，其公式是：

$$x_n = \frac{(n-1)g}{1+(n-1)g}x_{n-1} + \frac{1}{1+(n-1)g}x_{n-2}.$$

这里 g 是给定的正参数，试求 $n \to \infty$ 时 x_n 的极限的表示式.

292. 设有四个不共线的点. 其每一个是另外三个的垂心的充要条件是

$$\pm 34 \cdot 42 \cdot 23 \pm 41 \cdot 13 \cdot 34 \pm 12 \cdot 24 \cdot 41 \pm 23 \cdot 31 \cdot 12 = 0.$$

这里 rs 记第 r 个和第 s 个点之间的距离，同时算符中的三个不同于第四个.

293. 如果四次多项式的图形有两个实拐点，那么通过这两个点的割线和这条曲线围成三个不同的面积. 证明这些面积中的二个是相等的. 同时最大的面积等于另外两个面积之和.

294. 如果 $S_n = 1/1 + 1/2 + \cdots + 1/n$，证明：

$$\gamma = S_p + S_q - S_{pq} \leqslant 1.$$

这里 γ 是欧拉常数.

295. 一物体从一块与水平面夹角为 A 的平面上的 O 点投出. 投射方向是在一个铅直平面上. 此铅直平面把前一平面上有最大倾角的直线包含在内且投射方向与此直线的向上方向构成角 B，若平面是光滑的且物体具有完全的弹性. 试导出第 n 次升降中所费的时间 t_n 与第 n 次升降终了时的碰撞点 x_n 的表示式. 并问物体是否会再次碰中 O 点？各次升降中是否有一次为铅直的？x_n 的最大值为何？

296. 如果

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k x^{n_k}}{1+x^{n_k}} = x \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^{n_k}), \qquad |x| < 1$$

证明：可能对指数 $n_k = 2^k$ 为例外.

297. 设 $a_1 < a_2 < \cdots$ 是上密度比 $1/k$ 大的无穷整数列（用 $f(n)$ 记不大于 n 的 a_i 的个数则上密度定义为 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)/n$），那么对于适当的 t. 等式

$$a_t = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots a_{i_r} \quad 1 < r < k$$

是可解的，事实上，有无穷多个 t 具有此种性质.

298. 我们把调和级数改变形式：第一项取正的，其后两项取负的，其后三项又取正的，等等. 证明这个变形了的级数是收敛的.

299. 证明每一个大于 1 的整数的倒数是无穷级数.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$$

有限个相继项的和.

300. 试评论下面所谓关于连续假设的证明.

设 X 是 0 和 1 的无穷数列的全体集合.E 是 X 的任意不可数子集，对应于任意 0 和 1 的有限数列 $\{a_1, \cdots, a_k\}$，用 $E(a_1, \cdots, a_k)$ 表示所有数列 $\{x_n\}$ 的集合，这 $\{x_n\}$ 属于 E 且是以 $\{a_1, \cdots a_k\}$ 开始的.

因为 $E = E(0) + E(1)$. 集合 $E(0)$ 和 $E(1)$ 中至少有一个是不可数的；记 $a_1 = 0$ 或 1，依 $E(0)$ 是或不是不可数而定. 而在每一种情况，$E(a_1)$ 都不可数. 如果 a_i 对于 $i = 1, 2, \cdots, k$ 已经定义，使 $E(a_1 \cdots, a_k)$ 是不可数的. 那么记 $a_{i+1} = 0$ 或 1. 依 $E(a_1 \cdots, a_k, 0)$ 是还是不可数而定. 由此所得到的无穷数列 $\{a_1, a_2, a_3 \cdots\}$ 具有这样的性质即对于 k 的任意值 $E(a_1, \cdots, a_k)$ 确是不可数. 记 E^* 为 $k = 1, 2, 3 \cdots$ 的所有 $E(a_1, a_2, a_3, \cdots a_k)$ 的并集；那么 E^* 是 E 的子集合（实际上是一个无穷子集合）.

对于某些正整数 $k, E(a_1, \cdots, a_k, 0)$ 和 $E(a_1 \cdots a_k, 1)$ 确实是不可数的；事实上，对于无穷多个数 k 这是必然的事（不然，对于充分大的 $k, E(a_1, \cdots, a_k)$ 就不是不可数的了，这与它的构造产生矛盾）. 设 $k_1, k_2, k_3 \cdots$ 是整数. 对于这些 k 结论为真，同时对于在 E^* 中的任意 $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$. 记 $y_n = x_{k_n+1}$；那么 $\{y_1, y_2, y_3, \cdots\}$ 是 0 和 1 的无穷数列，由定义 k_n 的方法可得出由一些 0 和一些 1 组成的每一个可能序列作为 y 的序列，并得出在 E^* 中的数列 $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ 对应着（可能"多对一"的方式）一个集合（即所有 y 数列的集合）有连续统的幂 C 推得 E^* 的（因而是 E 的）基数不可能小于 C，换句话说：这也就证明了每一个幂为 C 的集合的不可数子集也有幂 C.

301. 给定 $a > 0, b > 0$，给定的 $f(x)$ 是非线性函数使得 $f(0) = 0, f(a) = b$. 和

$$f(x) \geqslant 0, \quad f''(x) \geqslant 0 \quad 0 \leqslant x \leqslant a.$$

对下式给出分析证明

$$2\pi \int_0^a f(x)[1 + (f'(x))^2]^{1/2} dx < \pi b(a^2 + b^2)^{1/2}.$$

（当把两边解释为曲面面积时，这不等式就变得直观了）.

302. 如果一个圆的圆心至少具有一个无理数的坐标，那么在圆周上至多有二个点具有有理坐标.

303. 证明

$$F_n=\begin{vmatrix}1&-1&1&-1&1&-1&\cdots\\1&1&0&1&0&1&\cdots\\0&1&1&0&1&0&\cdots\\0&0&1&1&0&1&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{vmatrix}.$$

这里 F_n 是 Fibonacci 数列 $1,1,2,3,5,\cdots,x,y,\cdots$ 的第 n 项，行列式是 $n-1$ 阶的.

304. 解函数方程

$$f(xy)=[f(x)]^{y^\beta}[f(y)]^{x^\beta}.$$

这里 β 是实常数，而 $f(x)$ 是实自变量 x 的连续和单值实函数.

305. 设 p 是大于 3 的素数，且设调和级数 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots$ 直到 p 项的和是 r/ps. 证明 p^2 能除尽 $r-s$.

306. 设 b 是固定的整数，$m=1,2,\cdots$ 且 $q(0<q<1)$ 是无理数，若区间 $(m,m+1)$ 不包含 $b+q$ 的倍数，则称之为间隙，证明由 b 个相继间隙组成的每一个集合恰好包含一个 $1+b/q$ 的倍数.

307. 证明：对于任何正奇数 $n,\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 是 $\cos^n\theta$ 和 $\sin^n\theta$ 具有有理系数的有理函数. 求 $n=3$ 时的显式表示式.

308. 构造两个发散级数，Σa_k 和 Σb_k，$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant 0$，$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant 0$，使得如果

$c_k=\min(a_k,b_k),c_k>0$，那么 Σc_k 是收敛的.

309. 在初等微积分教程中都包含有无穷小. 下面是无穷小的主部的多种描述的典型.

“如果一个无穷小由不同次数的两项或更多项组成，那么次数最低的项称为无穷小的主部”

证明：这不是确定的并给出一个确切的定义.

310. Z 的共轭 $\overline{Z}$ 作为 Z 的函数是处处不解析的. 尽管如此，如果 C 是一个任意圆或直线，还是存在一个函数 $f(z)$ 使得在 C 的每一个有限远点.$f(z)$ 是解析的同时等于 $\overline{Z}$，考虑另外的曲线，对此曲线，存在一个函数有同样的性质.

311. 证明

$$\int_0^\infty\frac{\cos x^2-\cos x}{x}dx=\frac{1}{2}\gamma.$$

这里 γ 是欧拉常数.

312. 如果 $y_1=x, y_2=x^{y_1}, \cdots y_n=x^{y_{n-1}}, x$ 的最大值是什么，才能使得 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在，又这极限是什么？

313. 证明：对于任意给出的整数 $k>1$ 存在无穷多个完全 k 次幂，它们不可能表为一个素数与一个 k 次幂的和（这推翻了 Hardy 和 Wright 在数论 19 页列出的猜想）

314. 证明

$$\prod=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!}.$$

315. 函数 $-\log\left|2\sin\frac{1}{2}x\right|$ 有 Fourier 级数

$$\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x+\cdots$$

证明这级数的部分和都不小于 1.

316. Eddington 讲演概率论时提出下列的问题：如果 A、B、C、D 四人，每人每讲三次话中，有一次是真话（互相独立的），并且 C 宣布 D 是说谎者，B 否定 C，A 肯定 B. 试问 D 说真话的概率是多少？他用排除法解得的数值为 25/71.

证明：正确的概率应是 13/41，而且这也就是 A、B、C 各自说真话的概率.

317. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{n^3}$.

318. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 阶群的 n 个元素，它们不一定各不相同. 证明存在整数 p 和 q，$1\leqslant p\leqslant q\leqslant n$，使得

$$\prod_{i=p}^{q} a_i=1.$$

319. 证明任一含有多于两个元素的群有不同于恒等的自同构.

320. 众所周知，当连分数

$$x=p-\cfrac{q}{p-\cfrac{q}{p-}}$$

收敛，则其值是方程 $x^2-px+q=0$ 的数值大的根. 另一方面，用逐次逼近法求根的牛顿公式是:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2+px_k+q}{2x_k-p}=\frac{y_k^2-q}{2x_k-p},\ k=0,1,2,\cdots.$$

证明：如果 x_0 是连分数的一个近似值，则 $x_1, x_2, x_3\cdots$ 都是连分数的近似值.

321. 如果两个相邻数的立方之差为一平方数，则它是相邻的两数平方的和之平方.

322. 证明：如果 x 和 y 没有公因子，则 $x^{2^n}+y^{2^n}$（其中 n 是正整数）的每一个奇数因子为形式 $2^{n+1}m+1$.

323. 如果

$$\theta_n=\int_0^1 x(x-1)\cdots(x-n+1)dx$$

与

$$\phi_n=\int_0^1 x(x+1\cdots)(x+n-1)dx$$

证明：$(-1)^n\theta_n=\phi_n-n\phi_{n-1}$，并且以 θ_n 来表示 ϕ_n.

324. 设已知平面上不全在一直线上的 n 个点，那么，连接它们的最短闭路是一简单多边形.

325. 证明

$$1+\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{4}\right)^2+\cdots=\frac{17\pi^4}{360}$$

326. 设 $f(z)=z^n+\cdots$ 是 $-n$ 次多项式.A_f 表示闭区域（不一定连通），在 A_f 上 $|f(z)|\leqslant 1$. 证明在 A_f 内总存在 z_0，使得 $|f'(z_0)|\geqslant n$，仅当 $f(z)=z^n$ 时，才相等.

327. 若 k 和 x 均为正整数，设

$f_k^{'}(x)=k\phi(x)$，其中 $\phi(x)$ 为欧拉 ϕ 函数，

$f_k^j(x)=f_k^{j-1}[f_k^{'}(x)], j=2,3,\cdots$.

证明：对于 $k\leqslant 3$，序列 $f_k^1(x),f_k^2(x),\cdots$ 最后是常数，而且当 $k\geqslant 4$ 时，序列最后是单调增加的.

328. 假定有克莱洛微分方程 $y=p(x)+f(p)$，其中 $p=y'$ 且 f 可微. 证明：如果 f' 是单调的，则奇解与任一特解恰有一个公共点.

329. 问如何在一个立方体上穿一个孔，使另一个大小相等的立方体能通过此孔.

330. 为了帮助我们学校开展储蓄运动，莫利斯组织了一次彩票售卖活动. 储蓄组的一些成员每人各发了一本夹有许多彩票的彩票册，每张票售价一个便士，每张中签的票奖若干张六便士的邮票. 当我问莫利斯获奖者得到多少张邮票时，他却讲我自己算得出来，而他必须告诉我的就是：在中签号摇出之前，全部售票人员围集在一张圆桌周围，每个售票者交出他得到的钱和未售完的票，结果（a）任二个人卖出的张数不同，（b）毫无例外，每一个售票者归还未售完的票的数目等于与他相邻两卖票者所得先令值的积，而且（c）为了酬劳他们，奖给各售票者一个便士后，剩下的金额恰好购买获胜者的邮票.（译注：1 先令 = 12 便士）.

问有多少个售票者，并且各自销售了多少票？

331. 设 G 是阿贝尔群，A 为 n 元子集，当 $a\in A$，有 $a^{-1}\in G-A$. 考虑 G 的 n^2 个 a_ia_j 形式的元素（不一定各不相同），其中 a_i 和 a_j 是 A 的元素，证明这 n^2 个元素中至多 $\binom{n}{2}$ 个是 A 的元素.

332. 证明

$$\frac{1}{(\sin h\pi)^2}+\frac{1}{(2\sin h2\pi)^2}+\frac{1}{(3\sin h3\pi)^2}+\cdots=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots\right)-\frac{11\pi^2}{180}.$$

333. 如果 p 是大于 3 的素数，$n=(2^{2p}-1)/3$. 证明 2^n-2 能被 n 除尽.

334. 设 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ 是一整数序列，使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{n_1n_2\cdots n_{k-1}}=\infty.$$

证明 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i}$ 是无理数.

335. 如果 p 是一个素数，证明

$$\binom{n}{p}\equiv[n/p]\qquad(\bmod p),$$

其中 $\binom{n}{p}$ 与 $[n/p]$ 按它们的通常意义理解.

证明 $[n/p]$ 含有因子 p^s 时，则 $\binom{n}{p}$ 能被 p^s 除尽.

336. 证明恒等式

$$\begin{aligned}1&+\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x^2}{(1-x)^2(1-x^2)^2}\\&+\frac{x^3}{(1-x)^2(1-x^2)^2(1-x^3)^2}+\cdots\\&=\frac{1-x+x^3-x^6+x^{10}-\cdots}{[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots]^2}.\end{aligned}$$

337. 证明：每一条闭的简单平面曲线上存在四个点，它们是一正方形的顶点.

338. 设 θ 是一无理数，$a=e^{i\theta x}$. 证明

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n^2}z^n.$$

以单位圆为自然边界.

339. 考虑三角形中线上的点，过形心不可能作出切去面积的三分之一的直线，而对从项点到底边的距离的五分之四处的点，则通过它可作出四条这样的直线. 并在中线上求出一些点，使在这些点，能作出上述那种直线的条数是变更的.

340. 设 $a_1<a_2<\cdots$ 是整数无穷序列. 证明总可从序列 $a_i+a_j, i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$. 挑选一个无穷子序列，使得任一个元素不能整除另一个.

341. 用来确定最初的麦森数的数列：$\{a\} = 3, 7, 47, 2207, 4870847, \cdots$. 通常定义为

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2.$$

证明：它也可定义为

$$a_k = f_2^{k+1}/f_2^k.$$

其中 f 都是斐波那契数 $1, 2, 3, 5, 8 \cdots$.

342. 一个球形的行星，其任一点 P 的密度仅仅是 P 到行星的中心的距离的函数. 行星具有如下性质：如果行星表面上两点之间有一条无摩擦的笔直的隧道，一个物体由其中一点滑动到另一点所需的时间与这两点的位置无关. 证明行星密度为常数.

343. 有一弧为定长 $l > 2a$，它位于 x 轴下方且连接点 $(-a, 0)$ 和 $(a, 0)$，它本身和 x 轴之间所围面积重心最低，求此弧. 实际上，其形状一定是这样的，就是当假定弧是柔软无重量且盛满了水，水的重量由两端点支持着时的弧.

344. 已知三角形 ABC 的高为 AA', BB', CC'. 证明三角形 $AB'C', A'BC', A'B'C$ 的欧拉线在九点圆上一点 P 共点，而这距离 PA', PB', PC' 之一等于另两距离之和.

345. 环中一个元素叫做是右拟正则的，如果存在一个元素 y，有 $x + y + xy = 0$. 显然，一个可除环中除去 -1 外每个元素是右拟正则的. 证明其逆：如果环 A 中仅仅除一个元素外，其余的每个元素是右拟正则的，则 A 是一个可除环.

346. 证明：对一切正整数 n，有

$$n - 1 = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{n + 2^{r-1} - 1}{2^r} \right].$$

照例，方括号表示最大整数函数.

347. 证明公式

$$(a, b) = \sum_{m=0}^{a-1} \sum_{n=0}^{a-1} (1/a) e^{2\pi ibmn/a}.$$

给出 a 和 b 的最大公约数 (a, b).

348. 如果 S 和 T 是任意两个同阶方阵，并且矩阵必须是非奇异的，则

$$(1 + S)^{-1}(S + T)(I + ST)^{-1}(I + S) = (I - S)(I + TS)^{-1}(S + T)(I - S)^{-1}.$$

349. 如果由

$$\frac{1-z^2}{\sin \pi z}\prod_{k=2}^{n}\sin(\pi z/k)\equiv\prod_{k=0}^{\infty}R_{nk}z^k.$$

来定义数 R_{nk}. 证明 $\lim R_{nk}^{-1/h}$ 等于超过 n 的第一个素数.

350. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left[\frac{\log^n}{\log^2}\right]=r$$

这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分，而 r 是欧拉常数.

351. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!)$.

352. 巴拿赫教授似乎习惯于在外衣的两个口袋各装一盒火柴. 当他吸烟时，随意地从任一盒中取一根火柴. 每盒原有 n 根火柴. 巴拿赫的问题是：当第一次发现一盒是空的时候，另一盒中剩下的火柴的期望值是多少？

353. 证明

$$\frac{2}{1}\Big/\frac{5}{4}\Big/\frac{8}{7}\Big/\frac{11}{10}\cdots=\sqrt{3}.$$

354. 设 $f(x,y)$ 对一切 (x,y) 连续，f 在每一个以原点为中心的圆上某一点取得最小值. 整个平面上所有这类点的集合是否连通.

355. 已知平面上三条不交于同一点的直线 l_1,l_2,l_3. 设 T_i 表示关于 l_1 的反射，并且令 $T=T_1T_2T_3$. 证明 T^2 是一平移.

356. 如果

$$\prod_{i=1}^{n}(x+r_i)\equiv\sum_{i=0}^{n}a_jx^{n-j}.$$

证明

$$\sum_{i=1}^{n}\tan^{-1}r_i=\tan^{-1}\frac{a_1-a_3+a_5-\cdots}{a_0-a_2+a_4-\cdots},$$

及

$$\sum_{i=1}^{n}\tan h^{-1}r_i=\tan h^{-1}\frac{a_1+a_3+a_5+\cdots}{a_0+a_2+a_4+\cdots}.$$

357. 一个缸内，放有编号从 0 到 9 的十个球，随机（不再放回）从中抽取 5 个球，然后排成一行，如此构成的数能被 396 整除的概率是多少？

358. 如果 $s_1,s_2,\cdots,s_m$ 是平行于 y 轴的 m 条线段，使得 $-n$ 次多项式的轨迹可通过含有 $n+2$ 条线段的每一簇. 则存在其轨迹与 m 条线段都相交的 n 次多项式.

359. 若 p 是一个素数及 $n \geqslant p$，则

$$n! \sum_{pi+j=n} 1/p^i i! j! \equiv 0, \quad \mathrm{mod} p.$$

360. 设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant n$，其任意两个 a_i 的最小公倍数大于 n. 证明

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} < 2.$$

361. 有两个同心球，要使其中一个内切于一个四面体，另一个外接于同一个四面体. 试确定这两个同心球应满足的条件，并给出四面体的作图方法.

362. 定义 $\theta(a,h)$ 为满足下列条件 $(i)(ii)$ 的最大数 θ，

$(i) 0 < \theta < 1$，

$(ii) f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$.

其中当 $x \neq 0$，$f(x) = x^2 \sin(1/x).f(0) = 0$.

现令 $\lambda(h) = [h, \theta(0,h)]^{-1}$，证明当 h 趋向于零时，$\lambda(h)$ 以阶梯函数的方式趋于无穷，特别地，给定 $\in > 0$，存在一个数 $H(\in)$，对于 $|h| < H$ 的每一个 h，存在一个整数 $n(h)$，使得

$$\left| \lambda(h) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \right| < \varepsilon.$$

363. x 为何实值时，序列 $f_n(x) = \sin 7^n \pi x$ 收敛，并且极限是什么？

364. 如果一个凸多面体各个面都具有中心对称，证明这样的多面体至少有 8 个顶点，其中每个顶点恰好是三条棱的交点. （立方体正好有 8 个这样的顶点）.

365. 设 $((x)) = x - [x] - \frac{1}{2}$，证明和 $\sum\limits_{n=1}^{m} \left(\left(2^n x + \frac{1}{2}\right)\right)$ 一致有界.

366. 设 $a_1 < a_2 < \cdots$ 是一个具有正的上限密度的无穷序列（即 $\lim a_k/k < \infty$）. 则存在一个无穷子序列，其中任一个元素不能整除另一个元素. 事实上存在一个无穷子序列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots$，使得 $\sum 1/a_{i_k} = \infty$，并且 a_{i_k} 都不能整除其余的任一个元素.

367. 设 $f_1(x)$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant M$ 上黎曼可积，又设

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(x) dx, n = 1, 2, \cdots.$$

证明：在区间上除 $f_1(x)$ 的可能不连续点外

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

有定义且连续，并且求出 $\phi(x)$ 的简单表达式.

368. 逆平方律具有这样一种性质：即均匀密度的球对外部某一点的引力，相当于整个球被集中在它的中心处时所具有的引力一样. 是否还有别的引力规律也有这种性质呢？

369. 若 $\sigma_n(n)$ 表示正整数 n 的所有因数的 r 次幂之和，证明

$$\sigma_r(n)\sigma_r(m)=\sum_{d/(m,n)} d^r\sigma_r\left(nm/d^2\right)$$

其中 d 遍取 n 和 m 的一切公因数.

370. 设

$$f(z)=\prod_{i=1}^{n}(z-z_i),\quad |z_i|\leqslant 1.$$

假定集合 $|f(z)|<1$，证明它至多由 $n-1$ 个分支组成.

371. 设对于 $|z|\leqslant 1.f(z)$ 解析. 又设 $|f(z)|$ 在 $z_0(|z_0|=1)$ 处取得其在单位圆上的极大值.

证明 $f'(z_0)\neq 0$.

372. 求行列式的值

（1）

$$a_n=\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_1 & -2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & 1-n \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \end{vmatrix} \text{其中}$$

（2）$b_n=\dfrac{n^n}{n!}$

373. 设 $a_1<a_2<\cdots$ 是一个无穷整数序列，试证下列两种无穷子序列必有一种存在. 一种是子序列中任一个整数不能整除另一整数，另一种是子序列中的每一个整数是其前面一个的倍数.

374. 有一组飞机，其中的每架飞机油量装满时可绕地球飞五分之一的距离，而每一架飞机都可以从另外一架飞机加油，假如所有的飞机的地面速度都相同，为常速，耗油率也相同，还假定只有基地是飞机的唯一着陆地点和地面加油地点，加油时间可以忽略. 现在要求使得有一架飞机能绕地球一圈而其他全部飞机都能安全返航，试问这队飞机至少要有多少架？

375. 类似于行星运动，我们对任一中心运动，至少对质点不通过中心的中心运动，自然会假设：

（a）只有当质点速度最小时，质点与中心距离最大.

（b）只有当距离最小时，质点速度最大.

试证明（a），并举出（b）的反例.

376. 序列 1110001011 的所有三个数字段代表了二进制数系中的全部三位数，且每段只用一次，对任一整数 n 用下面的方式可得出一个类似的序列：开始先写下 n 个 1，在后面的位置上逐次写上 0，除非添上 0 后完成的一个 n 位数字段是前面已出现过的，碰上这种情况则写上 1. 证明如此产生的 n^2+n-1 个数字序列也有在本题一开始时 $(n=3)$ 列出的序列的性质.

377. 方程

$$\cos \pi x+\cos \pi y+\cos \pi z=0 \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$$

有平凡解：$y=\frac{1}{2}, z=1-x$ 和 $y=\frac{2}{3}-x, z=\frac{2}{3}+x$.

方程还有非平凡解：$x=\frac{1}{5}, y=\frac{3}{5}, z=\frac{2}{3}$.

试证明方程再也没有别的有理数解.

378. 方程 $\tan x=x$ 的任何一个正根都可表为下列形式：

$$x=\left(p+\frac{1}{2}\right) \pi-\theta$$

其中 p 为大于或等于零的任一整数，且

$$\theta=c_0 \xi+c_1 \xi^3+c_2 \xi^5+\cdots, \quad \xi=\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right) \pi}.$$

系数 $c_0, c_1, c_2, \cdots\cdots$ 都是正有理数. 证明对于充分大的 n

$$c_n=12^{-\frac{1}{6}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \pi^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2 n+1}(2 n+1)^{-\frac{4}{3}}\left(1+\omega_n\right)$$

这里当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\omega_n \rightarrow 0$，使上述级数即便在 $p=0$ 时依然收敛.

有没有人和你说过一句话，你学数学、数学竞赛的样子真的好帅，

没有？那现在，就在前一秒，我对你说了。

—来自最爱你的小数君

傻子俱乐部等着你来！（微信公众号，数学竞赛的那些事儿，shuxuejingsai001）