

1.3 导数在研究函数中的应用

1.3.1 单调性

【学习目标】 1.理解导数与函数的单调性的关系.2.掌握利用导数判断函数单调性的方法.3.能利用导数求不超过三次多项式函数的单调区间.

知识梳理

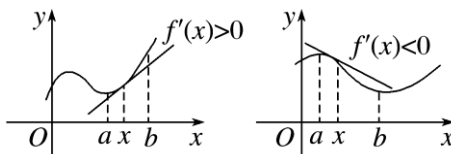
梳理教材 夯实基础

知识点一 函数的单调性与其导数正负的关系

定义在区间 (a, b) 内的函数 $y=f(x)$

$f'(x)$ 的正负	$f(x)$ 的单调性
$f'(x) > 0$	单调 <u>递增</u>
$f'(x) < 0$	单调 <u>递减</u>

上述结论可以用下图来直观理解.



知识点二 函数图象的变化趋势与导数值大小的关系

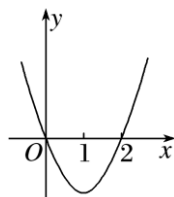
导数值	切线的斜率	倾斜角	曲线的变化趋势	函数的单调性
>0	≥ 0	<u>锐角</u>	<u>上升</u>	<u>递增</u>
<0	≤ 0	<u>钝角</u>	<u>下降</u>	<u>递减</u>

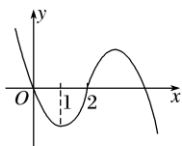
题型探究

探究重点 素养提升

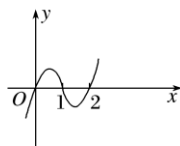
一、导数与函数图象的关系

例1 (1)已知 $f'(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的导函数,若 $y=f'(x)$ 的图象如图所示,则函数 $y=f(x)$ 的图象可能是()

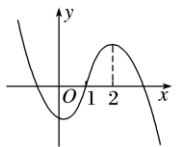




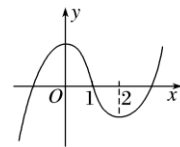
A



B



C



D

答案 D

解析 由导函数的图象可知, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为增函数;

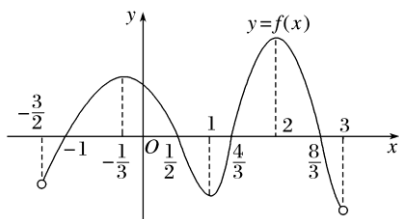
当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上为减函数;

当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上为增函数.

观察选项易知 D 正确.

(2) 函数 $y=f(x)$ 在定义域 $(-\frac{3}{2}, 3)$ 内可导, 其图象如图所示, 记 $y=f(x)$ 的导函数为 $y=f'(x)$,

则不等式 $f'(x) < 0$ 的解集为_____.



答案 $(-\frac{1}{3}, 1) \cup (2, 3)$

解析 函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\frac{1}{3}, 1)$ 和区间 $(2, 3)$ 上单调递减, 所以在区间 $(-\frac{1}{3}, 1)$ 和区间 $(2,$

$3)$ 上, $y=f'(x) < 0$, 所以 $f'(x) < 0$ 的解集为 $(-\frac{1}{3}, 1) \cup (2, 3)$.

延伸探究

1. 若本例(2)中的条件不变, 试求不等式 $f'(x) > 0$ 的解集.

解 根据题目中的图象, 函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3})$ 和区间 $(1, 2)$ 上为增函数,

所以在区间 $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3})$ 和区间 $(1, 2)$ 上, $y=f'(x) > 0$,

所以 $f'(x) > 0$ 的解集为 $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}) \cup (1, 2)$.

2. 若本例(2)中的条件不变, 试求不等式 $xf'(x) > 0$ 的解集.

解 由本例(2)及延伸探究 1 以及已知条件可知,

当 $x \in (-\frac{1}{3}, 0)$ 时, 函数为减函数, 则 $f'(x) < 0$, $xf'(x) > 0$;

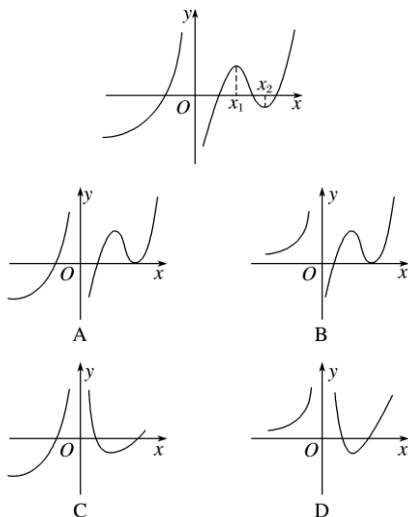
当 $x \in (1, 2)$ 时, 函数为增函数, 则 $f'(x) > 0$, $xf'(x) > 0$.

综上所述: $xf'(x) > 0$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (1, 2)$.

反思感悟 (1)研究一个函数图象与导函数图象之间的关系时, 注意抓住各自的关键要素. 对于原函数, 要注意其图象在哪个区间内单调递增、在哪个区间内单调递减; 而对于导函数, 则应注意其函数值在哪个区间内大于零、在哪个区间内小于零, 并分析这些区间与原函数的单调区间是否一致.

(2)利用导函数单调性可以判断原函数图象的凹凸性: 若 $f'(x) > 0$ 且 $f'(x)$ 单调递增, 则原函数 $f(x)$ 的图象上升且下凸; 若 $f'(x) > 0$ 且 $f'(x)$ 单调递减, 则原函数 $f(x)$ 的图象上升且上凸; 当 $f'(x) < 0$ 时判定方法类同.

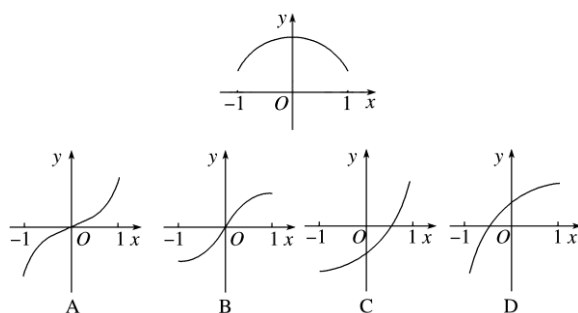
跟踪训练 1 (1)设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $f(x)$ 的图象如图所示, 则导函数 $f'(x)$ 的图象可能为()



答案 D

解析 由图象可知, $y=f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数, 因此在 $x < 0$ 时, 有 $f'(x) > 0$ (即全部在 x 轴上方), 故排除 A, C. 从原函数图象上可以看出, 在区间 $(0, x_1)$ 上原函数是增函数, $f'(x) > 0$; 在区间 (x_1, x_2) 上原函数是减函数, $f'(x) < 0$; 在区间 $(x_2, +\infty)$ 上原函数是增函数, $f'(x) > 0$, 故排除 B.

(2)已知函数 $y=f(x)$ 的图象是下列四个图象之一, 且其导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示, 则该函数的图象是()



答案 B

解析 方法一 由函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象自左到右先增后减, 可知函数 $y=f(x)$ 图象的切线的斜率自左到右先增大后减小.

方法二 由于 $f'(x)>0$ 恒成立, 则根据导数符号和函数单调性的关系可知: $f(x)$ 单调递增, 即图象从左至右上升, 四个图象都满足.

由于当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$ 且越来越小, 则函数值增加得越来越慢, 图象呈现上凸; 当 $x<0$ 时, $f'(x)>0$ 且越来越大, 则函数值增加得越来越快, 图象呈现下凸, 可以判断 B 正确.

二、利用导数求函数的单调区间

多维
探究

命题角度 1 不含参数的函数求单调区间

例 2 求下列函数的单调区间.

$$(1)f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+3; (2)f(x)=3x^2-2\ln x.$$

解 (1)函数的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x)=2x^2-4x=2x(x-2)$, 令 $f'(x)>0$, 则 $2x(x-2)>0$, 解得 $x<0$ 或 $x>2$. 令 $f'(x)<0$, 则 $2x(x-2)<0$, 解得 $0<x<2$, 所以函数的单调增区间为 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$; 函数的单调减区间为 $(0, 2)$.

(2)函数的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x)=6x-\frac{2}{x}=2\frac{3x^2-1}{x}.$$

$$\text{令 } f'(x)>0, \text{ 即 } 2\frac{3x^2-1}{x}>0,$$

$$\text{解得 } -\frac{\sqrt{3}}{3}<x<0 \text{ 或 } x>\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{又 } \because x>0, \therefore x>\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{令 } f'(x)<0, \text{ 即 } 2\frac{3x^2-1}{x}<0,$$

$$\text{解得 } x<-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 或 } 0<x<\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{又 } \because x>0, \therefore 0<x<\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调增区间为 } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right), \text{ 单调减区间为 } \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

反思感悟 (1)利用导数求函数 $f(x)$ 的单调区间, 实质上是转化为在 $f(x)$ 定义域内解不等式 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$, 不等式的解集就是函数的单调区间.

(2)如果函数的单调区间不止一个时,应用“,”、“和”等连接,而不能写成并集的形式.

(3)要特别注意函数的定义域.

跟踪训练2 函数 $f(x)=x^2e^{-x}$ 的单调减区间为_____.

答案 $(-\infty, 0), (2, +\infty)$

解析 函数的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x)=(x^2)'e^{-x}+x^2(e^{-x})'=2xe^{-x}+x^2e^{-x}(-1)=e^{-x}(2x-x^2)$,
令 $f'(x)<0$, 即 $2x-x^2<0$, 解得 $x<0$ 或 $x>2$, 所以函数的单调减区间为 $(-\infty, 0), (2, +\infty)$.

命题角度2 含参数的函数求单调区间

例3 讨论函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2+x-(a+1)\ln x(a\geq 0)$ 的单调性.

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x)=ax+1-\frac{a+1}{x}=\frac{ax^2+x-(a+1)}{x}.$$

$$(1) \text{ 当 } a=0 \text{ 时, } f'(x)=\frac{x-1}{x},$$

令 $f'(x)>0$, 得 $x>1$; 令 $f'(x)<0$, 得 $0<x<1$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数, 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数.

$$(2) \text{ 当 } a>0 \text{ 时, } f'(x)=\frac{a\left(x+\frac{a+1}{a}\right)(x-1)}{x},$$

$$\because a>0, \therefore -\frac{a+1}{a}<0.$$

令 $f'(x)>0$, 得 $x>1$; 令 $f'(x)<0$, 得 $0<x<1$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数, 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数.

综上所述, 当 $a\geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数, 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数.

反思感悟 (1)讨论参数要全面, 要做到不重不漏.

(2)解不等式时若涉及分式不等式要注意结合定义域化简, 也可转化为二次不等式求解.

跟踪训练3 设函数 $f(x)=e^x-ax-2$, 求 $f(x)$ 的单调区间.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x)=e^x-a$.

若 $a\leq 0$, 则 $f'(x)>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

若 $a>0$, 则当 $x\in(-\infty, \ln a)$ 时, $f'(x)<0$;

当 $x\in(\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

综上所述, 当 $a\leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, +\infty)$;

当 $a>0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(\ln a, +\infty)$, 单调减区间为 $(-\infty, \ln a)$.

三、已知函数的单调性求参数的范围

例4 已知函数 $f(x)=x^3-ax-1$. 若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 求实数 a 的取值范围.

解 $f'(x)=3x^2-a$.

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数,

所以 $f'(x)=3x^2-a \geq 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上恒成立,

即 $a \leq 3x^2$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

因为 $3x^2 \geq 0$, 所以只需 $a \leq 0$ 即可.

又因为 $a=0$ 时, $f'(x)=3x^2 \geq 0$, $f(x)=x^3-1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 所以 $a \leq 0$, 综上实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0]$.

延伸探究

1. 若函数 $f(x)$ 不变, $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上为减函数, 试求 a 的取值范围.

解 由 $f'(x)=3x^2-a \leq 0$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立, 得 $a \geq 3x^2$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立.

因为 $-1 < x < 1$, 所以 $3x^2 < 3$, 所以 $a \geq 3$.

即当 a 的取值范围为 $[3, +\infty)$ 时, $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为减函数.

2. 若函数 $f(x)$ 不变, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, 1)$, 求 a 的值.

解 由本例可知, $a > 0$ 且 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}, \frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$, 所以 $\frac{\sqrt{3a}}{3}=1$, 即 $a=3$.

反思感悟 (1) 利用导数法解决取值范围问题的两个基本思路

① 将问题转化为不等式在某区间上的恒成立问题, 即 $f'(x) \geq 0$ (或 $f'(x) \leq 0$) 恒成立, 利用分离参数或函数性质求解参数范围, 然后检验参数取 “=” 时是否满足题意.

② 先令 $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$), 求出参数的取值范围后, 再验证参数取 “=” 时 $f(x)$ 是否满足题意.

(2) 恒成立问题的重要思路

① $m \geq f(x)$ 恒成立 $\Rightarrow m \geq f(x)_{\max}$.

② $m \leq f(x)$ 恒成立 $\Rightarrow m \leq f(x)_{\min}$.

跟踪训练4 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+bx^2+(b+2)x+3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 b 的取值范围为()

A. $[0, 1]$ B. $[1, 2]$ C. $[-1, 2]$ D. $[1, +\infty)$

答案 C

解析 根据题意可知, $f'(x)=x^2+2bx+b+2 \geq 0$ 恒成立,

则 $\Delta=4b^2-4(b+2) \leq 0$, 解得 $-1 \leq b \leq 2$.

■ 课堂小结 ■

1. 导数的符号反映了函数在某个区间上的单调性, 导数绝对值的大小反映了函数在某个区间或某点附近变化的快慢程度.

2.利用导数求函数 $f(x)$ 的单调区间的一般步骤:

(1)确定函数 $f(x)$ 的定义域;

(2)求导数 $f'(x)$;

(3)在函数 $f(x)$ 的定义域内解不等式 $f'(x) > 0$ 和 $f'(x) < 0$;

(4)根据(3)的结果确定函数 $f(x)$ 的单调区间.

随堂演练

基础巩固 学以致用

1.函数 $f(x) = 2x^2 - x$ 的单调增区间是()

A. $(\frac{1}{4}, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{1}{4})$ C. $(-\frac{1}{4}, +\infty)$ D. $(-\infty, -\frac{1}{5})$

答案 A

2.函数 $f(x) = x \ln x$ ()

A.在 $(0, 5)$ 上是增函数

B.在 $(0, 5)$ 上是减函数

C.在 $(0, \frac{1}{e})$ 上是减函数, 在 $(\frac{1}{e}, 5)$ 上是增函数

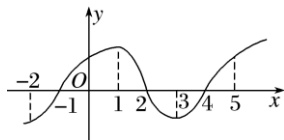
D.在 $(0, \frac{1}{e})$ 上是增函数, 在 $(\frac{1}{e}, 5)$ 上是减函数

答案 C

解析 由 $f(x) = x \ln x$, 可得 $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 (x > 0)$. 由 $f'(x) > 0$, 可得 $x > \frac{1}{e}$; 由 $f'(x) < 0$,

可得 $0 < x < \frac{1}{e}$. 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上是减函数, 在 $(\frac{1}{e}, 5)$ 上是增函数.

3.如图所示的是函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象, 则在 $[-2, 5]$ 上函数 $f(x)$ 的单调增区间为_____.



答案 $(-1, 2)$ 和 $(4, 5]$

解析 因为在 $(-1, 2)$ 和 $(4, 5]$ 上 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[-2, 5]$ 上的单调增区间为 $(-1, 2)$ 和 $(4, 5]$.

4.若函数 $f(x) = x^3 - ax^2 - x + 6$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是_____.

答案 $[1, +\infty)$

解析 $\because f'(x) = 3x^2 - 2ax - 1$, 且 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

$\therefore$ 不等式 $3x^2 - 2ax - 1 \leq 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立,

$\therefore f'(0) \leq 0$, 且 $f'(1) \leq 0$, $\therefore a \geq 1$.

5. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$, 且 $f'(-1) = -4$, $f'(1) = 0$.

(1) 求 a 和 b ;

(2) 试确定函数 $f(x)$ 的单调区间.

解 (1) 因为 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$, 所以 $f'(x) = x^2 + 2ax + b$,

$$\text{由 } \begin{cases} f'(-1) = -4, \\ f'(1) = 0, \end{cases} \quad \text{得 } \begin{cases} 1 - 2a + b = -4, \\ 1 + 2a + b = 0. \end{cases}$$

解得 $a = 1$, $b = -3$.

(2) 由 (1) 得 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$.

$$f'(x) = x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3).$$

由 $f'(x) > 0$ 得 $x > 1$ 或 $x < -3$;

由 $f'(x) < 0$ 得 $-3 < x < 1$.

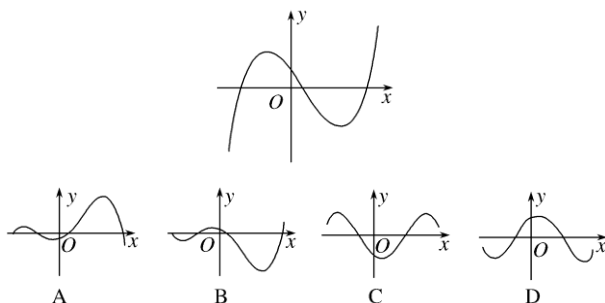
所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, -3)$, $(1, +\infty)$, 单调减区间为 $(-3, 1)$.

课时对点练

注重双基 强化落实

一、选择题

1. 函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图所示, 则函数 $y = f(x)$ 的图象可能是()

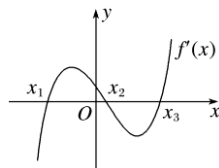


答案 D

解析 观察导函数 $f'(x)$ 的图象可知, $f'(x)$ 的函数值从左到右依次为小于 0, 大于 0, 小于 0, 大于 0,

$\therefore$ 对应函数 $f(x)$ 的增减性从左到右依次为减、增、减、增.

观察选项可知, 排除 A, C.



如图所示, $f'(x)$ 有 3 个零点, 从左到右依次设为 x_1 , x_2 , x_3 , 且 $x_2 > 0$, $f(x)$ 在 x_2 左侧附近为增函数, 右侧附近为减函数, 故选项 D 正确. 故选 D.

2. 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x$, 则函数 $f(x)$ 的单调增区间是()

- A. (3, 9) B. $(-\infty, -1), (3, +\infty)$
C. $(-1, 3)$ D. $(-\infty, 3), (9, +\infty)$

答案 B

解析 因为 $f(x)=x^3-3x^2-9x$, 所以 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x-3)(x+1)$.

令 $f'(x)>0$, 解得 $x>3$ 或 $x<-1$.

3. 函数 $f(x)=\ln x-4x+1$ 的单调增区间为()

- A. $(0, \frac{1}{4})$ B. (0, 4)
C. $(-\infty, \frac{1}{4})$ D. $(\frac{1}{4}, +\infty)$

答案 A

解析 $f(x)=\ln x-4x+1$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, $f'(x)=\frac{1}{x}-4=\frac{1-4x}{x}$, 当 $f'(x)>0$ 时, 解得

$0<x<\frac{1}{4}$, 故选 A.

4. 函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 的单调减区间是()

- A. (0, 1) B. (1, $+\infty$) C. $(-\infty, 1)$ D. (0, $+\infty$)

答案 A

解析 $\because y=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $y'=x-\frac{1}{x}$,

令 $y'<0$, 即 $x-\frac{1}{x}<0$, 解得 $0<x<1$, 故选 A.

5. 下列函数中, 在 $(0, +\infty)$ 内为增函数的是()

- A. $y=\sin x$ B. $y=xe^x$
C. $y=x^3-x$ D. $y=\ln x-x$

答案 B

解析 B 项中, $y=xe^x$, $y'=e^x+xe^x=e^x(1+x)$,

当 $x\in(0, +\infty)$ 时, $y'>0$,

$\therefore y=xe^x$ 在 $(0, +\infty)$ 内为增函数.

6. 已知函数 $f(x)=-x^3+ax^2-x-1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调函数, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ B. $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
C. $(-\infty, -\sqrt{3})\cup(\sqrt{3}, +\infty)$ D. $(-\infty, -\sqrt{3})\cup[\sqrt{3}, +\infty)$

答案 A

解析 $f'(x)=-3x^2+2ax-1$, $\because f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调函数, $\therefore f'(x)$ 恒非正. $\therefore 4a^2-12\leq 0$.

$\therefore -\sqrt{3}\leq a\leq \sqrt{3}$, 故选 A.

二、填空题

7. 函数 $f(x) = x + 2\cos x$, $x \in (0, \pi)$ 的单调减区间是_____.

答案 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$

解析 由 $f'(x) = 1 - 2\sin x < 0$,

得 $\sin x > \frac{1}{2}$, 又 $x \in (0, \pi)$, $\therefore x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$,

故答案为 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

8. 函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ 的单调减区间是_____.

答案 $(0, 1), (1, e)$

解析 令 $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} < 0$, 解得 $0 < x < e$.

因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$,

所以函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ 的单调减区间是 $(0, 1), (1, e)$.

9. 已知函数 $f(x) = x^3 - mx^2 + m - 2$ 的单调减区间为 $(0, 3)$, 则 $m =$ _____.

答案 $\frac{9}{2}$

解析 $\because f(x) = x^3 - mx^2 + m - 2$,

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 2mx$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{2}{3}m$,

又函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, 3)$,

$\therefore \frac{2}{3}m = 3$, 即 $m = \frac{9}{2}$.

10. 若函数 $f(x) = ax^3 + x (a \neq 0)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是_____.

答案 $(0, +\infty)$

解析 $f'(x) = 3ax^2 + 1$, $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, $\therefore 3ax^2 + 1 \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立. 又 $a \neq 0$, $\therefore a > 0$.

三、解答题

11. 求下列函数的单调区间:

(1) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$;

(2) $f(x) = \sin x(1 + \cos x) (0 < x < \pi)$.

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x+1)(x-1)$.

令 $f'(x) > 0$, 则 $4x(x+1)(x-1) > 0$,

解得 $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$,

令 $f'(x) < 0$, 则 $4x(x+1)(x-1) < 0$.

得 $x < -1$ 或 $0 < x < 1$.

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-1, 0)$ 和 $(1, +\infty)$.

单调减区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$.

$$(2) f'(x) = \cos x(1 + \cos x) + \sin x(-\sin x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1).$$

$$\because 0 < x < \pi, \therefore \cos x + 1 > 0,$$

$$\text{由 } f'(x) > 0 \text{ 得 } 0 < x < \frac{\pi}{3}; \text{ 由 } f'(x) < 0 \text{ 得 } \frac{\pi}{3} < x < \pi,$$

故函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, \frac{\pi}{3})$,

单调减区间为 $(\frac{\pi}{3}, \pi)$.

12. 试求函数 $f(x) = kx - \ln x$ 的单调区间.

$$\text{解 函数 } f(x) = kx - \ln x \text{ 的定义域为 } (0, +\infty), f'(x) = k - \frac{1}{x} = \frac{kx - 1}{x}.$$

$$\text{当 } k \leq 0 \text{ 时, } kx - 1 < 0, \therefore f'(x) < 0,$$

则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$$\text{当 } k > 0 \text{ 时, 由 } f'(x) < 0, \text{ 即 } \frac{kx - 1}{x} < 0,$$

$$\text{解得 } 0 < x < \frac{1}{k};$$

$$\text{由 } f'(x) > 0, \text{ 即 } \frac{kx - 1}{x} > 0, \text{ 解得 } x > \frac{1}{k}.$$

$$\therefore \text{当 } k > 0 \text{ 时, } f(x) \text{ 的单调减区间为 } (0, \frac{1}{k}),$$

$$\text{单调增区间为 } (\frac{1}{k}, +\infty).$$

综上所述, 当 $k \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, +\infty)$, 无单调增区间;

$$\text{当 } k > 0 \text{ 时, } f(x) \text{ 的单调减区间为 } (0, \frac{1}{k}), \text{ 单调增区间为 } (\frac{1}{k}, +\infty).$$

13. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x + 2$.

(1) 若 $a = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $a > 0$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

$$\text{解 (1)} \because a = 1, \therefore f(x) = x^3 + x^2 - x + 2,$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 + 2x - 1, \therefore f'(1) = 4. \text{ 又 } f(1) = 3,$$

$$\therefore \text{切点坐标为 } (1, 3),$$

$$\therefore \text{所求切线方程为 } y - 3 = 4(x - 1),$$

$$\text{即 } 4x - y - 1 = 0.$$

$$(2)f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)(3x-a),$$

由 $f'(x)=0$ 得 $x=-a$ 或 $x=\frac{a}{3}$.

又 $a>0$, 由 $f'(x)<0$, 得 $-a<x<\frac{a}{3}$,

由 $f'(x)>0$, 得 $x<-a$ 或 $x>\frac{a}{3}$,

故 $f(x)$ 的单调减区间为 $\left(-a, \frac{a}{3}\right)$,

单调增区间为 $(-\infty, -a)$ 和 $\left(\frac{a}{3}, +\infty\right)$.

►探究与拓展

14. 已知 $f(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的可导函数, 且 $(x+1)f'(x)>f(x)$, 则下列一定成立的是()

A. $3f(4)<4f(3)$

B. $3f(4)>4f(3)$

C. $3f(3)<4f(2)$

D. $3f(3)>4f(2)$

答案 D

解析 由 $(x+1)f'(x)>f(x)$,

得 $(x+1)f'(x)-f(x)>0$,

$$\text{令 } g(x)=\frac{f(x)}{x+1}, \text{ 则 } g'(x)=\frac{(x+1)f'(x)-f(x)}{(x+1)^2}>0,$$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore g(2)<g(3)$,

则 $\frac{f(2)}{3}<\frac{f(3)}{4}$, 即 $4f(2)<3f(3)$, 故选 D.

15. 已知函数 $f(x)=ax^2+\ln(x+1)$.

(1) 当 $a=-\frac{1}{4}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上为减函数, 求实数 a 的取值范围.

解 (1) 当 $a=-\frac{1}{4}$ 时,

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^2+\ln(x+1)(x>-1),$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{x+1}=-\frac{(x+2)(x-1)}{2(x+1)}(x>-1).$$

由 $f'(x)>0$, 解得 $-1<x<1$;

由 $f'(x)<0$, 解得 $x>1$.

故函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-1, 1)$, 单调减区间是 $(1, +\infty)$.

(2) 因为函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上为减函数,

所以 $f'(x)=2ax+\frac{1}{x+1}\leq 0$ 对任意 $x\in[1, +\infty)$ 恒成立,

即 $a \leq -\frac{1}{2x(x+1)}$ 对任意 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立.

令 $g(x) = -\frac{1}{2x(x+1)}$, $x \in [1, +\infty)$,

易求得在区间 $[1, +\infty)$ 上 $g'(x) > 0$,

故 $g(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

故 $g(x)_{\min} = g(1) = -\frac{1}{4}$,

故 $a \leq -\frac{1}{4}$.

即实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$.