江苏省仪征中学 18-19 学年第二学期期末文科复习讲义(6)

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x-1}+(2-x)^0$ 的定义域为_____________$[1,2)\cup(2,+\infty)$

2. 已知复数 z 满足 $(-1+2i)+\overline{z}=5-6i$，则 $|z|$ 的值为_______10

3.两条平行直线 $x+3y-4=0$ 与 $2x+6y-9=0$ 之间的距离为__▲____. $\dfrac{\sqrt{10}}{20}$

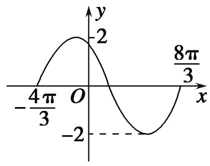
4.在直角坐标系中，直线 $\sqrt{3}x+y-3=0$ 的倾斜角___▲___. 2、120^0

5. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{7},\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，那么 $\tan\beta$ 的值为________.

由 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 得 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5},\tan\alpha=-2$，$\tan\beta=\tan(\alpha+\beta-\alpha)=\dfrac{\dfrac{1}{7}+2}{1+(-\dfrac{2}{7})}=3.$

6.已知 $\cos(\dfrac{\pi}{4}+x)=\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{17\pi}{12}<x<\dfrac{7\pi}{4}$，则$\dfrac{\sin 2x-2\sin^2 x}{1-\tan x}=$___________. $-\dfrac{7}{25}$

7．如图所示，与函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$的图象相对应的函数的解析式为________.



答案：$y=2\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$

解析：由图得振幅，A＝2；周期 T＝4π，则$\omega=\dfrac{1}{2}$；$x=-\dfrac{\pi}{3}$时，函数取得最大值，则$\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

8.已知函数 $f(x)=3\sin(\omega x-\dfrac{\pi}{6})(\omega>0)$和 $g(x)=3\cos(2x+\varphi)$的图象的对称中心完全相同，若 $x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，则 $f(x)$的取值范围是______. 答案：$\left[-\dfrac{3}{2},\ 3\right]$

9.已知 $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数．当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-4x$，则不等式 $f(x)>x$ 的解集为___________. **答案：**$(-5，0)\cup(5，+\infty)$

本题考查函数奇偶性解析：当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-4x$，则不等式 $f(x)>x$，得 $x\in(5，+\infty)$ 当 $x<0$ 时，$f(x)=-f(-x)=-x^2-4x$，则不等式 $f(x)>x$，得到 $x\in(-5，0)$或者作图像

10. “$\log_2 a>\log_2 b$”是“$2^a>2^b$”的______________条件.（从“充分不必要、必要不充分、充要 、 既不充分也不必要”中选一填空）充分不必要

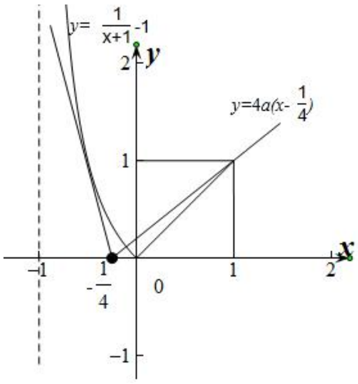
11.$\dfrac{2\sin50^\circ+\sin80^\circ(1+\sqrt{3}\tan10^\circ)}{\sqrt{1+\cos10^\circ}}=$_____________. 答案：2

12.在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 C：$x^2+(y-3)^2=2$，点 A 是 x 轴上的一个动点，AP，AQ 分别切圆 C 于 P，Q 两点，则线段 PQ 的长的取值范围是________. 答案：$[\dfrac{2}{3}\sqrt{14},2\sqrt{2})$

13.已知圆 M：$(x-1)^2+(y-1)^2=4$，直线 l：$x+y-6=0$，A 为直线 l 上一点．若圆 M 上存在两点 B，C，使得$\angle BAC=60^\circ$，则点 A 横坐标的取值范围是________. 答案：[1，5]

14. 若函数$f(x)$满足$f(x+1)=\frac{1}{f(x)+1}$，当$x\in[0,1]$时，$f(x)=x$，若在区间$(-1,1]$上，方程$f(x)-4ax-a=0$有两个不等的实根，则实数 a 的取值范围是______ .

【解析】解：$\because f(x+1)=\frac{1}{f(x)+1}$，$\therefore f(x)=\frac{1}{f(x+1)}-1$，当$x\in(-1,0)$时，$x+1\in(0,1)$，$\therefore f(x)=\frac{1}{x+1}-1$，$x\in(-1,0)$．作出$f(x)$在$(-1,1]$上的函数图形，如图所示：



令$f(x)-4ax-a=0$得$f(x)=4a(x+\frac{1}{4})$，$\therefore y=f(x)$与直线$y=4a(x+\frac{1}{4})$在$(-1,1]$上有两个交点．若直线$y=4a(x+\frac{1}{4})$经过点$(1,1)$，则$a=\frac{1}{5}$；若直线$y=4a(x+\frac{1}{4})$与$y=\frac{1}{x+1}-1$相切，

联立方程组$\begin{cases}y=4ax+a\\ y=\frac{1}{x+1}-1\end{cases}$，消元得$4ax^2+(5a+1)x+a=0$，令$\Delta=(5a+1)^2-16a^2=0$得$a=-1$或$a=-\frac{1}{9}$．当$a=-\frac{1}{9}$时，方程的解为$x=-\frac{5a+1}{8a}=\frac{1}{2}$，不符合题意；故$a=-1$．

$\therefore a<-1$或$0<a<\frac{1}{5}$．故答案为：$(-\infty,-1)\cup(0,\frac{1}{5}]$．

15.已知函数 $f(x)=4\tan x\sin(\frac{\pi}{2}-x)\cos(x-\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}$.

(Ⅰ)求 $f(x)$的定义域与最小正周期；(Ⅱ) 讨论 $f(x)$在区间$[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$上的单调性.

解析：(I) 解：$f(x)$的定义域为$\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right\}$.

$f(x)=4\tan x\cos x\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=4\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$

$=4\sin x\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)-\sqrt{3}=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\sin^2 x-\sqrt{3}$

$=\sin 2x+\sqrt{3}(1-\cos 2x)-\sqrt{3}=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin(2x)-\frac{\pi}{3}$.

所以，$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(II)解：令 $z=2x-\frac{\pi}{3}$，函数 $y=2\sin z$ 的单调递增区间是$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in Z$.

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x-\frac{\pi}{3}\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi$，得$-\frac{\pi}{12}+k\pi\leq x\leq\frac{5\pi}{12}+k\pi$，$k\in Z$.

设 $A=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right],B=\left\{x\left|-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in Z\right.\right\}$，易知 $A\cap B=\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$.

所以，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$ 上递增，在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{12}\right]$ 上递减.

16. 已知函数 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$，其中 e 为自然对数底数.（1）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并加以证明；（2）判断 $f(x)$ 的单调性，并用定义证明；（3）设 $A=\{x\,|\,f(x^2+3)+f(5-6x)\le 0\}$，若 $\exists x\in A,\ln x-tx=0$，求实数 t 的取值范围.

解：（1）定义域为 R，$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-f(x)$ 所以函数 $f(x)$ 为奇函数.

（2）设 $x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1}-\frac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1}=(1-\frac{2}{e^{x_2}+1})-(1-\frac{2}{e^{x_1}+1})=\frac{2(e^{x_2}-e^{x_1})}{(e^{x_1}+1)(e^{x_2}+1)}$$

$\because e>1,x_1<x_2\ \therefore e^{x_2}>e^{x_1}>0\ \therefore e^{x_2}-e^{x_1}>0,(e^{x_1}+1)(e^{x_2}+1)>0$

$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$ 即 $f(x_1)<f(x_2)$　　所以 $f(x)$ 在 R 上单调递增

（3）$\because$ 函数 $f(x)$ 是奇函数，故不等式 $f(x^2+3)+f(5-6x)\le 0$ 可化为

$f(x^2+3)\le -f(5-6x)=f(6x-5)$ 由 $f(x)$ 在 R 上单调递增得：

$x^2+3\le 6x-5\ \therefore 2\le x\le 4$ 即 $A=\{x\,|\,2\le x\le 4\}$

“$\exists x\in A,\ln x-tx=0$”等价于“$\exists x\in A,t=\frac{\ln x}{x}$”

设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$（$2\le x\le 4$），$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $h'(x)=0$ 得 $x=e$

当 $2\le x<e$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $e<x\le 4$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

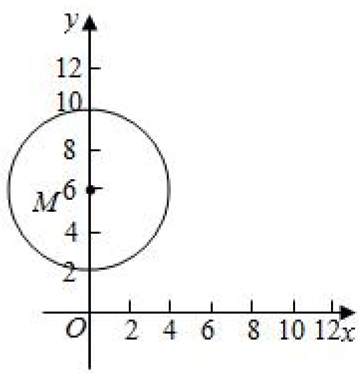
又 $h(2)=\frac{\ln 2}{2}$，$h(4)=\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}$，故 $h(x)\in[\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{e}]$　所以，$t\in[\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{e}]$

17. 已知圆 M: $x^2+(y-6)^2=16$，点 P 是直线 l: $x-2y=0$ 上的一动点，过点 P 作圆 M 的切线 PA，PB，切点为 A，B.

(1)当切线 PA 的长度为 $4\sqrt{3}$ 时，求线段 PM 长度.

(2)若△PAM 的外接圆为圆 N，试问：当 P 在直线 l 上运动时，圆 N 是否过定点？若存在，求出所有的定点的坐标；若不存在，说明理由；

(3)求线段 AB 长度的最小值.



【答案】解：(1)由题意知，圆 M：$x^2+(y-6)^2=16$，则圆 M 的半径$r=4$，圆心$M(0,6)$，设$P(2a,a)$，若 PA 是圆的一条切线，则$\angle MAP=90°$，则$|PM|=\sqrt{AM^2+AP^2}=8$；

(2)设$P(2a,a)$，又由$\angle MAP=90°$，则经过 A，P，M 三点的圆 N 以 MP 为直径，

圆心$N(a,\frac{a+6}{2})$，半径为$\frac{|PM|}{2}=\frac{\sqrt{5a^2-12a+36}}{2}$得圆 N 的方程为$(x-a)^2+(y-\frac{a+6}{2})^2=\frac{5a^2-12a+36}{4}$

即$x^2+y^2-2ax-ay-6y+6a=0$，有$x^2+y^2-6y+a(-2x-y+6)=0$

由$\begin{cases}-2x-y+6=0\\x^2+y^2-6y=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\y=6\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{12}{5}\\y=\frac{6}{5}\end{cases}$，

则圆过定点$(0,6)$,$(\frac{12}{5},\frac{6}{5})$；

(3)圆 N 的方程$(x-a)^2+(y-\frac{a+6}{2})^2=\frac{5a^2-12a+36}{4}$，即$x^2+y^2-2ax-ay-6y+6a=0$①

圆 M：$x^2+(y-6)^2=16$即$x^2+y^2-12y+20=0$②

②－①得：圆 M 与圆 N 相交弦 AB 所在直线方程为：$2ax+(a-6)y+20-6a=0$

圆心$M(0,6)$到直线 AB 的距离$d=\frac{|(a-6)\cdot 6+20-6a|}{\sqrt{(2a)^2+(a-6)^2}}=\frac{16}{\sqrt{5a^2-12a+36}}$

弦长$|AB|=2\sqrt{16-d^2}=8\sqrt{1-\frac{16}{5(a-\frac{6}{5})^2+\frac{144}{5}}}$

当$a=\frac{6}{5}$时，线段 AB 长度有最小值$\frac{16}{3}$.

18．已知函数 $f(x)=ax-\ln x+1(a\in R)$， $g(x)=xe^{1-x}$．

（1）求函数 $g(x)$ 在区间 $(0,e]$ 上的值域；

（2）是否存在实数 a，对任意给定的 $x_0\in(0,e]$，在区间 $[1,e]$ 上都存在两个不同的 $x_i(i=1,2)$，使得 $f(x_i)=g(x_0)$ 成立.若存在，求出 a 的取值范围；若不存在，请说明理由；

18．解：(1)$\because g'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=e^{1-x}(1-x)$　　$\therefore g(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递增，在区间 $[1,e)$ 上单调递减,且 $g(0)=0,g(1)=1,g(e)=e^{2-e}>0$　$\therefore g(x)$ 的值域为 $(0,1]$

（2）令 $m=g(x)$，则由(Ⅰ)可得 $m\in(0,1]$，原问题等价于：对任意的 $m\in(0,1]$ $f(x)=m$ 在 $[1,e]$ 上总有两个不同的实根，故 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 不可能是单调函数

$\because f'(x)=a-\frac{1}{x}(1\le x\le e)$　　$\frac{1}{x}\in[\frac{1}{e},1]$

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)=a-\frac{1}{x}<0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $[1,e]$ 上递减，不合题意

当 $a\ge 1$ 时，$f'(x)>0$, $f(x)$ 在区间 $[1,e]$ 上单调递增，不合题意

当 $0<a\le\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$, $f(x)$ 在区间 $[1,e]$ 上单调递减，不合题意

当 $1<\frac{1}{a}<e$ 即 $\frac{1}{e}<a<1$ 时，$f(x)$ 在区间 $[1,\frac{1}{a}]$ 上单调递减；$f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{a},e]$ 上单递增，

由上可得 $a\in(\frac{1}{e},1)$，此时必有 $f(x)$ 的最小值小于等于 0 而由

$f(x)_{\min}=f(\frac{1}{a})=2+\ln a\le 0$ 可得 $a\le\frac{1}{e^2}$，则 $a\in\Phi$

综上，满足条件的 a 不存在。