2020 届高三考前调研测试

数学 Ⅰ

2020.06

（全卷满分 160 分，考试时间 120 分钟）

注意事项：

1． 答卷前，请考生务必将自己的学校、姓名、考试号等信息填写在答卷规定的地方.

2． 试题答案均写在答题卷相应位置，答在其它地方无效.

一、填空题（本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分，请将答案填写在答题卷相应的位置上）

1． 已知集合 $A=\{-1,0,a^2\}$， $B=\{-1,1\}$，则 $A\cap B=B$，则实数 a 的值是____▲____.

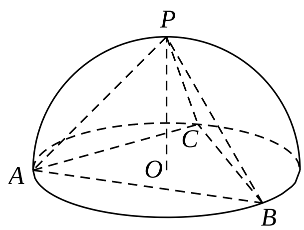
2． 已知复数 z 满足 $\dfrac{3+4\mathrm{i}}{z}=\mathrm{i}$ (i 为虚数单位)，则 $|z|=$____▲____.

3． 某校在高一、高二、高三三个年级中招募志愿者50人，现用分层抽样的方法分配三个年级的志愿者人数，已知高一、高二、高三年级的学生人数之比为4:3:3，则应从高三年级抽取__▲__名志愿者.

4． 一个算法的伪代码如图所示，执行此算法，最后输出的 S 的值为____▲____.

```
S←0
I ←1
While   I<4
  S←S+5
  I ←I +1
End While
Print S
```

第 4 题图



第 9 题图

5． 已知抛物线 $y^2=2x$ 的准线也是双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的一条准线，则该双曲线的两条渐近线方程是____▲____.

6． 某校机器人兴趣小组有男生 3 名，女生 2 名，现从中随机选出 3 名参加一个机器人大赛，则选出的人员中恰好有一名女生的概率为____▲____.

7． 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，T_n 是其前n项之积，若 $a_5\cdot a_6=a_7$，则 T_7 的值是____▲____.

8． 已知 $f(x)=\cos x+e^{|x|}$，则 $f(3-x)-f(3x+1)>0$ 的解集为____▲____.

9． 如图，已知正 $\triangle ABC$ 是一个半球的大圆 O 的内接三角形，点 P 在球面上，且 $OP\perp$ 面 ABC，则三棱锥 $P-ABC$ 与半球的体积比为____▲____.

10．已知 $\sin(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha=$____▲____.

11．设 $[t]$ 表示不超过实数 t 的最大整数(如 $[-1.3]=-2$，$[2.6]=2$)，则函数 $f(x)=|2x-1|-[x]$ 的零点个数为____▲____.

12．已知点 M 是边长为 2 的正 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，若 $\lambda+\mu=\frac{1}{3}$，则 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$ 的最小值为____▲____.

13．已知等腰梯形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=60^\circ$，$AB=2$，若梯形上底 CD 上存在点 P，使得 $PA=\sqrt{2}PB$，则该梯形周长的最大值为____▲____.

14．锐角 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别为角 A,B,C 的对边，若 $a\cos B=b(1+\cos A)$，则 $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b}{c}$ 的取值范围为____▲____.

二、解答题：（本大题共 6 道题，计 90 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

15．（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x)=\cos x\cdot\sin(x+\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{4}$，$x\in\mathrm{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和对称中心；

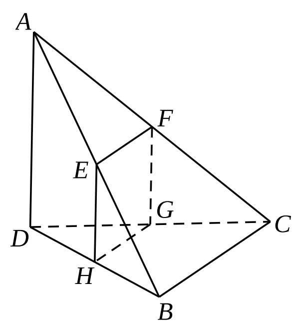
(2) 若函数 $g(x)=f(x+\frac{\pi}{4})$，求函数 $g(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$ 上的最值.

16．（本小题满分 14 分）

如图，四面体 $ABCD$ 被一平面所截，平面与四条棱 AB,AC,CD,BD 分别相交于 E,F,G,H 四点，且截面 $EFGH$ 是一个平行四边形，$AD\perp$ 平面 BCD，$BC\perp CD$. 求证：

(1) $EF\parallel BC$；

(2) $EF\perp$ 平面 ACD.



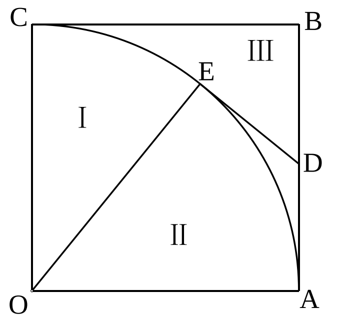
17.（本小题满分 14 分）

如图，边长为 1 的正方形区域 $OABC$ 内有以 OA 为半径的圆弧 AEC．现决定从 AB 边上一点 D 引一条线段 DE 与圆弧 AEC 相切于点 E，从而将正方形区域 $OABC$ 分成三块：扇形 COE 为区域 I，四边形 $OADE$ 为区域 II，剩下的 $CBDE$ 为区域 III.区域 I 内栽树，区域 II 内种花，区域 III 内植草.每单位平方的树、花、草所需费用分别为 $5a$、$4a$、a，总造价是 W，设 $\angle AOE = 2\theta$．

(1) 分别用 θ 表示区域 I、II、III 的面积；

(2) 将总造价 W 表示为 θ 的函数，并写出定义域；

(3) 求 θ 为何值时，总造价 W 取最小值？

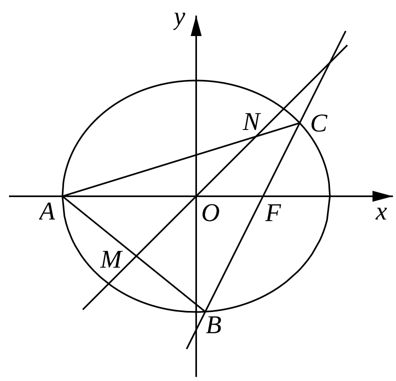


18.（本小题满分 16 分）

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右准线为直线 $x=4$，左顶点为 A，右焦点为 F．已知斜率为 2 的直线 l 经过点 F，与椭圆 E 相交于 B,C 两点，且 O 到直线 l 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程；

(2) 若过 O 的直线 $m:y=kx$ 与直线 AB,AC 分别相交于 M,N 两点，且 $OM=ON$，求 k 的值.



19.（本小题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=e^x-ax^2(a\in\mathrm{R})$.

(1) 若曲线 $f(x)$ 与直线 $l:y=(e-2)x+b(b\in\mathrm{R})$ 在 $x=1$ 处相切.

① 求 $a+b$ 的值；

② 求证：当 $x\geq 0$ 时， $f(x)\geq(e-2)x+b$ ；

(2) 当 $a=0$ 且 $x\in(0,+\infty)$ 时，关于的 x 不等式 $x^2f(x)\leq mx+2\ln x+1$ 有解，求实数 m 的取值范围.

20.（本小题满分 16 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为非零实数，其前 n 项和为 S_n ，且 $\dfrac{S_n}{S_{n+1}}=\dfrac{a_n}{a_{n+2}}$.

(1) 若 S_3=3，求 a_3 的值；

(2) 若 a_{2021}=2021a_1，求证：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；

(3) 若 a_1=1， a_2=2，是否存在实数 λ ，使得 $\left|2^{a_n}-2^{a_m}\right|\leq\lambda\left|a_n^2-a_m^2\right|$ 对任意正整数 m ，n 恒成立，若存在，求实数 λ 的取值范围，若不存在，说明理由.