

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度高三数学周三试卷 (2020.12.15)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

一、选择题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

- 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{2, 5\}$, 则()
 A. $A \subseteq B$ B. $C_U B = \{1, 3, 4\}$ C. $A \cup B = \{2, 5\}$ D. $A \cap B = \{3\}$
- 若复数 z 满足 $z(1-i) = 2i$, 则下列说法正确的是()
 A. z 的虚部为 2 B. z 为实数 C. $|z| = \sqrt{2}$ D. $z + \bar{z} = 2i$
- 当动点 P 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱 DC 上运动时, 异面直线 D_1P 与 BC_1 所成角的取值范围()
 A. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ B. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ C. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ D. $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$
- 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(2-x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \ln(x+1)$, 下列说法正确的个数为()
 ①函数 $f(x)$ 的最大值为 1; ②函数 $f(x)$ 的最小值为 0; ③函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, -1]$ 上是递减函数; ④ $f(x) = \ln 2$ 在区间 $(-3, 3)$ 上有 2 个解.
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、不定项选择题 (本大题共 2 小题, 共 8.0 分)

- 已知 a, b 为正实数, 则下列结论正确的是()
 A. 若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
 B. 若 $a < b$, m 为正实数, 则 $\frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b}$
 C. 若 $a \neq b$, 则 $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$
 D. 若 $a + b = 1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$
- 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, D, E 分别是 AC, AB 上的两点, 且 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DC}$, BD 与 CE 交于点 O , 则下列说法正确的为()
 A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = -1$ B. $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$
 C. $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\overrightarrow{ED}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的投影为 $\frac{7}{6}$

三、填空题（本大题共 2 小题，共 10.0 分）

7. 已知 θ 是第四象限角，且 $\cos\theta = \frac{4}{5}$ ，那么 $\frac{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})}{\cos(2\theta - 6\pi)}$ 的值为_____.

8. 已知函数 $f(x) = (\frac{x}{a})^2 - \frac{x}{a}$, $g(x) = \ln x$, 若对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) \geq g(x)$, 则实数 a 的取值范围是_____.

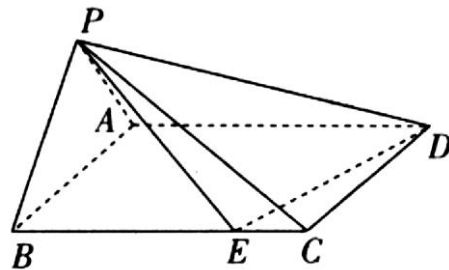
四、解答题（本大题共 3 小题，共 36.0 分）

9. 在① $a\cos B + b\cos A = 2c\cos C$, ② $2a\sin A\cos B + b\sin 2A = \sqrt{3}a$, ③ $\triangle ABC$ 的面积为 S , 且 $4S = \sqrt{3}(a^2 + b^2 - c^2)$, 这三个条件中任意选择一个, 填入下面的问题中, 并求解: 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin \omega x \cos \omega x + 2\cos^2 \omega x$ 的最小正周期为 π , c 为 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值, 且_____, 求 $a - b$ 的取值范围.

10. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $PB \perp PD$.

(1) 证明: 平面 $PBC \perp$ 平面 PAD ;

(2) 若 $PA = PB$, $BE = 2EC$, 且 $AB = 2$, $BC = 3$, 求二面角 $A-PD-E$ 的余弦值.



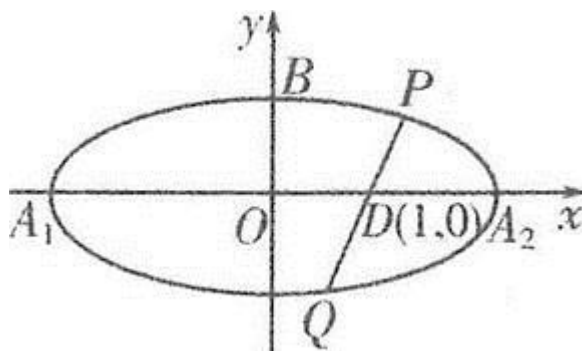
11. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, A_1, A_2 分别为椭圆 E 的左右顶点,

B 为上顶点, $\triangle A_1BA_2$ 的面积为2. 直线 l 过点 $D(1,0)$ 且与椭圆 E 交于 P, Q 两点.

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 求 $\triangle OPQ$ 面积的最大值;

(3) 设直线 A_1P 与直线 QA_2 交于点 N , 证明: 点 N 在定直线上, 并写出该直线方程.



答案和解析

1. 【答案】B 2. 【答案】C

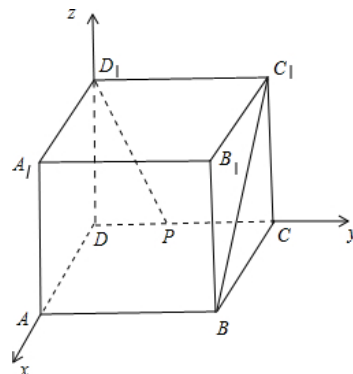
3. 【答案】C 解：分别以直线 DA , DC , DD_1 为 x , y , z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，设正方体的棱长为 1，则： $D_1(0,0,1)$, $B(1,1,0)$, $C_1(0,1,1)$ ，设 $P(0,a,0)$, $0 \leq a \leq 1$ ，

$\therefore \overrightarrow{D_1P} = (0, a, -1)$, $\overrightarrow{BC_1} = (-1, 0, 1)$ ，设异面直线 D_1P 与 BC_1 所成的角为 θ ，则：

$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{D_1P} \cdot \overrightarrow{BC_1}|}{|\overrightarrow{D_1P}| |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + 1}}, \text{ 且 } 0 \leq a \leq 1, \therefore \frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 且 } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

$\therefore \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, $\therefore$ 异面直线 D_1P 与 BC_1 所成角的取值范围为 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$.

故选：C.

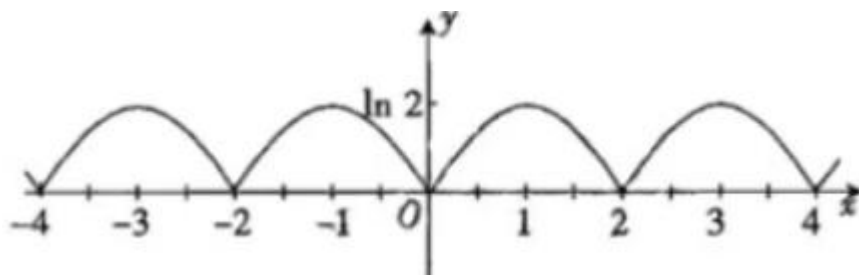


4. 【答案】B

解：当 $x \in [0,1]$ 时， $f(x) = \ln(x+1)$ 为增函数，且 $f(x) \geq 0$ ，

又因为函数 $f(x)$ 为偶函数， $f(x) = f(2-x)$ ，即 $f(1+x) = f(1-x)$ ，

图像关于直线 $x = 1$ 对称，函数图像如下图所示，



由图可知，函数 $f(x)$ 的最大值为 $\ln 2$ ，最小值为 0，

在区间 $[-2, -1]$ 上为递增函数，在区间 $(-3, 3)$ 上且当 $x = 1$ 或 $x = -1$ 时， $f(x) = \ln 2$ 。

所以②④项正确。

5. 【答案】ACD

解：对于 A，若 a, b 为正实数 $a > b$ ，则 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} < 0$ ，所以 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ，故 A 正确；

对于 B，若 a, b, m 为正实数， $a < b$ ，

则 $\frac{a+m}{b+m} - \frac{a}{b} = \frac{m(b-a)}{b(b+m)} > 0$ ，则 $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$ ，故 B 错误；

对于 C，若 a, b 为正实数 $a \neq b$ ，则 $a - b \neq 0$ ， $a + b > 0$ ，

所以 $a^3 + b^3 - (a^2b + ab^2) = (a-b)^2(a+b) > 0$ ，故 $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$ ，故 C 正确；

对于 D，若 $ab > 0$ ， $a + b = 1$ ，则 $a > 0$ ， $b > 0$ ，

$$\text{则 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 4,$$

(当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立), 故 D 正确. 故选 ACD .

6. 【答案】BCD

解: 因为 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形,

E 是 AB 上的点, 且 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$,

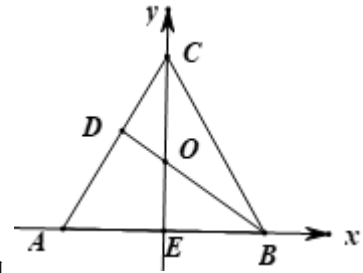
所以以 E 为坐标原点, EB 为 x 轴, EC 为 y 轴, 建立平面直角坐标系如下图:

则 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, \sqrt{3})$. 又因为 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DC}$, 即 D 为线段 AC 靠近点 C 的三等分点, 所以 $D(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$.

设 $O(0, t)$, 则 $\overrightarrow{DO} = (\frac{1}{3}, t - \frac{2\sqrt{3}}{3})$, 而 $\overrightarrow{DB} = (\frac{4}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$,

由 D 、 O 、 B 三点共线得 $\frac{1}{3} \times (-\frac{2\sqrt{3}}{3}) - \frac{4}{3}(t - \frac{2\sqrt{3}}{3}) = 0$,

解得 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $O(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 因此 O 是 EC 的中点, 因此 B 正确.



又因为 $\overrightarrow{AB} = (2, 0)$, $\overrightarrow{CE} = (0, -\sqrt{3})$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$, 因此 A 不正确;

又因为 $\overrightarrow{OA} = (-1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{OB} = (1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{OC} = (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

所以 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, 因此 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 C 正确;

又因为 $\overrightarrow{ED} = (-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$, $\overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{3})$,

所以 $\overrightarrow{ED}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的投影为 $\frac{\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{\frac{1}{3} + 2}{2} = \frac{7}{6}$, 因此 D 正确.

7. 【答案】 $\frac{5\sqrt{2}}{14}$

解: 依题意, 有: $\sin \theta = -\frac{3}{5}$, $\frac{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})}{\cos(2\theta - 6\pi)} = \frac{\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4}}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2 \times (\frac{4}{5})^2 - 1} = \frac{5\sqrt{2}}{14}$.

8. 【答案】 $[-2e^{\frac{1}{3}}, 0) \cup (0, 1]$

【解答】令 $h(x) = f(x) - g(x) = (\frac{x}{a})^2 - \frac{x}{a} - \ln x$,

由题意知, 对任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $h(x) \geq 0$. $h'(x) = \frac{2x}{a^2} - \frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - ax - a^2}{a^2x} =$

$\frac{(x-a)(2x+a)}{a^2x}$, 当 $a > 0$ 时, $h(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x)_{\min} = h(a) = -\ln a \geq 0$,

所以 $0 < a \leq 1$; 当 $a < 0$ 时, $h(x)$ 在 $(0, -\frac{a}{2})$ 上单调递减, 在 $(-\frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 所

以 $-2e^{\frac{1}{3}} \leq a < 0$. 综上, 实数 a 的取值范围是 $[-2e^{\frac{1}{3}}, 0) \cup (0, 1]$.

9.【答案】解: $f(x) = 2\sqrt{3}\sin\omega x \cos\omega x + 2\cos^2\omega x = \sqrt{3}\sin 2\omega x + \cos 2\omega x + 1$

$$= 2\sin(2\omega x + \frac{\pi}{6}) + 1,$$

因为 $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \pi$, 所以 $\omega = 1$, $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 1$, 因为 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,

所以 $\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$, 所以 $-\frac{1}{2} \leq \sin(2x + \frac{\pi}{6}) \leq 1$, 所以 $f(x)$ 的最大值为 3, 即 $c = 3$.

①由 $a\cos B + b\cos A = 2c\cos C$ 及正弦定理可得:

$$\sin A \cos B + \sin B \cos A = 2\sin C \cos C, \text{ 即 } \sin(A+B) = 2\sin C \cos C,$$

所以 $\cos C = \frac{1}{2}$, C 为三角形内角, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$,

②由 $2a\sin A \cos B + b\sin 2A = \sqrt{3}a$ 及正弦定理得 $2\sin^2 A \cos B + 2\sin B \sin A \cos A = \sqrt{3}\sin A$,

因为 $\sin A \neq 0$, 所以 $\sin A \cos B + \sin B \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\sin(A+B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为 C 为锐角, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

③由 $4S = \sqrt{3}(a^2 + b^2 - c^2)$, 得 $2ab\sin C = \sqrt{3}(a^2 + b^2 - c^2)$, 即 $\sin C = \frac{\sqrt{3}(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$,

所以 $\sin C = \sqrt{3}\cos C$, 即 $\tan C = \sqrt{3}$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$, 因为 $c = 3$, $C = \frac{\pi}{3}$,

所以 $A+B = \frac{2}{3}\pi$, $\frac{c}{\sin C} = 2\sqrt{3}$, $a-b = 2\sqrt{3}(\sin A - \sin B) = 2\sqrt{3}[\sin A - \sin(\frac{2}{3}\pi - A)]$

$$= 2\sqrt{3}(\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A - \frac{1}{2}\sin A) = 2\sqrt{3}\sin(A - \frac{\pi}{3}),$$

因为 $\begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < B = \frac{2\pi}{3} - A < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 所以 $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2}$, 所以 $-\frac{\pi}{6} < A - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6}$,

所以 $-\sqrt{3} < 2\sqrt{3}\sin(A - \frac{\pi}{3}) < \sqrt{3}$, 所以 $a-b$ 的取值范围为 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

10.【答案】(1)证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AD \perp AB$,

又平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore AD \perp$ 平面 PAB , 且 $PB \subset$ 平面 PAB , $\therefore PB \perp AD$.

$\because PB \perp PD$, $PD \cap AD = D$, $PD, AD \subset$ 平面 PAD , $\therefore PB \perp$ 平面 PAD ,

$\because PB \subset$ 平面 PBC , $\therefore$ 平面 $PBC \perp$ 平面 PAD .

(2)解: 如图, 取 AB 中点为 O , 连接 PO , 由 $PB \perp$ 平面 PAD 知 $PA \perp PB$,

又 $PA = PB$, $AB = 2$,

$\because PO = 1$ 且 $PO \perp AB$, 则 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 取 CD 中点 F , 连接 OF , 则 $OF \parallel AD$,

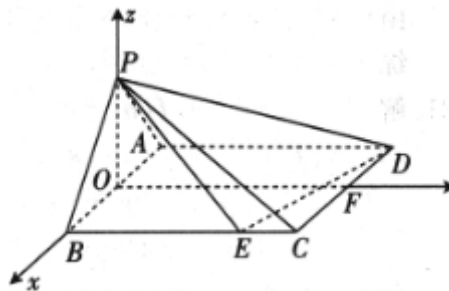
由(1)知 $OF \perp$ 平面 PAB , 于是以 O 为坐标原点, OB, OF, OP 所在的直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系. 则 $A(-1, 0, 0)$, $P(0, 0, 1)$, $D(-1, 3, 0)$, $E(1, 2, 0)$,

$$\overrightarrow{PA} = (-1, 0, -1), \overrightarrow{AD} = (0, 3, 0), \overrightarrow{PE} = (1, 2, -1), \overrightarrow{DE} = (2, -1, 0).$$

设平面 PAD 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

平面 PDE 的法向量为 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则由} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PA} = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} -x - z = 0, \\ 3y = 0. \end{cases}$$



取 $x = 0$ 得一个法向量为 $\vec{m} = (1, 0, -1)$,

$$\text{由} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PE} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0. \end{cases} \text{得} \begin{cases} x_1 + 2y_1 - z_1 = 0, \\ 2x_1 - y_1 = 0. \end{cases}$$

取 $x_1 = 1$ 得一个法向量为 $\vec{n} = (1, 2, 5)$, 设二面角 $A - PD - E$ 的平面角大小为 α ,

$$\text{则} \cos \alpha = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \left| \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} \right| = \frac{2\sqrt{15}}{15}.$$

11. 【答案】解: (1) 由题知 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$ 即 $a = 2b$,

又 $S_{\Delta A_1BA_2} = ab = 2$, $\therefore a = 2, b = 1$, $\therefore$ 椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

(2) 当 PQ 斜率不存在时, 易知 $P(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $Q(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, 此时 $S_{\Delta OPQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

当 PQ 斜率存在时, 设直线 PQ 方程为 $y = k(x - 1) (k \neq 0)$,

将 $y = k(x - 1) (k \neq 0)$ 代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 整理得 $(4k^2 + 1)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 4 = 0$,

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2 + 1}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{4k^2 - 4}{4k^2 + 1}$,

$$\begin{aligned} \therefore S_{\Delta OPQ} &= \frac{1}{2} \times 1 \times |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times 1 \times |k(x_1 - x_2)| = \frac{|k|}{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \frac{2|k|\sqrt{3k^2 + 1}}{4k^2 + 1} = \frac{2\sqrt{3k^4 + k^2}}{4k^2 + 1}, \text{ 令 } 4k^2 + 1 = t (t > 1), \end{aligned}$$

$$\therefore S_{\Delta OPQ} = \frac{2}{t} \sqrt{\frac{3}{16}(t - 1)^2 + \frac{1}{4}(t - 1)} = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 3} < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore \Delta OPQ$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(3)当 PQ 斜率不存在时, $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $Q\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$,

则直线 A_1P : $y = \frac{\sqrt{3}}{6}(x + 2)$, 直线 QA_2 : $y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 2)$,

联立解得交点为 $N(4, \sqrt{3})$;

当 PQ 斜率存在时, 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 直线 A_1P 方程为 $y = \frac{y_1}{x_1+2}(x + 2)$,

直线 QA_2 方程为 $y = \frac{y_2}{x_2-2}(x - 2)$, $\therefore \frac{y_1}{x_1+2}(x + 2) = \frac{y_2}{x_2-2}(x - 2)$,

由(2)可知 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2+1}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{4k^2-4}{4k^2+1}$,

$$\therefore \frac{x-2}{x+2} = \frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)} = \frac{k(x_1-1)(x_2-2)}{k(x_2-1)(x_1+2)} = \frac{x_1x_2 - (x_1+x_2) + 2 - x_1}{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) - 2 - 3x_1}$$

$$= \frac{\frac{4k^2-2}{4k^2+1}x_1}{\frac{12k^2-6}{4k^2+1}-3x_1} = \frac{1}{3}, \therefore \frac{x-2}{x+2} = \frac{1}{3} \text{ 解得 } x = 4, \text{ 即 } N \text{ 点横坐标为 } 4,$$

$\therefore$ 综上, 点 N 在定直线 $x = 4$ 上.