江苏省仪征中学 2019 届高三上学期数学周末限时训练 12（2018.12.08）

一、填空题（共计 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分）

1.若复数 $z=\dfrac{a-i}{1+2i}(a\in R)$ 为纯虚数，则实数 a 的值为_____.

2.从 1,3,5,7 这五个数中任取两个数，则这两个数之和是奇数的概率为_____.

3.设 $a>0$, 且 $a\neq 1, b\in R$, 集合 $A=\left\{\dfrac{1}{4},\log_a 2\right\}, B=\left\{-1,0,2^b\right\}$, 若 $A\subseteq B$, 则 $a+b=$___.

4.函数 $f(x)=\lg(4^x-2)$ 的定义域为_____.

5.若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点恰好是双曲线 $\dfrac{x^2}{12-m}-\dfrac{y^2}{m+4}=1$ 的右焦点，则实数 p 的值为_____.

6.将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图像向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图像，则函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为_____.

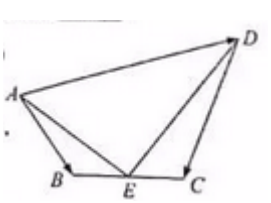
7.已知实数 x, y 满足 $\begin{cases}x-2y+4\geq 0,\\ 3x-y-3\leq 0,\\ x\geq 0,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最大值为_____.

8.在公比不等于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $2a_3a_5=a_4$, 且 $a_3, \dfrac{3}{2}a_4, 2a_5$ 成等差数列，则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项的和的值为_____.

9.设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A, 上顶点为 B, $AB=\sqrt{13}$, 且椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, 则过椭圆 C 的右焦点 F_2 且与直线 AB 平行的直线 l 的方程为_____.

10.已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$，则不等式 $f(2x^2-1)+f(x)\leq 0$ 的解集为____.

11.在平面四边形 $ABCD$ 中，若 E 为 BC 的中点， $AE=2, DE=3$, 则 $\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})=$___.



12.已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|, x>0.\\ 2^{|x|}, x\le 0.\end{cases}$ 若函数 $y=|2f(x)-a|-1$ 存在 5 个零点，则实数 a 的取值范围为____.

13.在平面直角坐标系 xoy 中，已知点 $A(1,1), B, C$ 为圆 $O: x^2+y^2=4$ 上的两动点，且 $BC=2\sqrt{3}$, 若圆 O 上存在点 P, 使得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{OP}, m>0$, 则正数 m 的取值范围为____.

14.在 ΔABC 中，设角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c, 若 $\sqrt{2}a, b, c$ 成等差数列，则 $\frac{3}{\sin A}+\frac{\sqrt{2}}{\sin C}$ 的最小值为____.

二、解答题：

15.（本小题满分 14 分）在 ΔABC 中，已知 $\sin^2 A-\sin^2 B=(\sin A-\sin C)\sin C.$

（1）求内角 B 的大小

（2）若 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\sin 2C$ 的值.

16.（本小题满分 14 分）若函数 $f(x)=\sin(ax+\frac{\pi}{3})+b$ ($a>0$，$b>0$)的图象与 x 轴相切，且图象上相邻两个最高点之同的距离为 π.

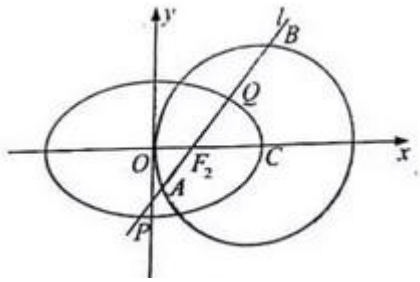
（1）求 a，b 的值；

（2）求 $f(x)$ 在[0，$\frac{\pi}{4}$]上的最大值和最小值.

17.（本小题满分 14 分）如图,设点 $F_2(1,0)$ 为椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，圆 $C:(x-a)^2+y^2=a^2$, 过 F_2 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线 l 交圆 C 于 A,B 两点，交椭圆 E 于点 P,Q 两点，已知当 $k=\sqrt{3}$ 时， $AB=2\sqrt{6}.$

（1）求椭圆 E 的方程.

（2）当 $PF_2=\dfrac{10}{3}$ 时，求 ΔPQC 的面积.

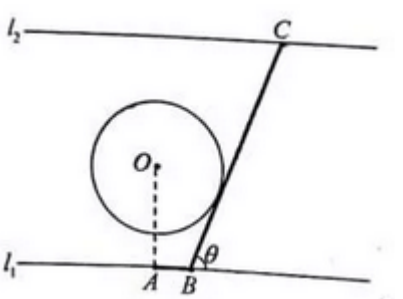


18.（本小题满分 16 分）如图为某大河的一段支流，岸线 l_1,l_2 近似满足 $l_1 /\!/ l_2$, 宽度为 7 km, 圆 O 为河中的一个半径为 2 km 的小岛，小镇 A 位于岸线 l_1 上，且满足岸线 $l_1 \perp OA, OA=3km,$ 现计划建造一条自小镇 A 经小岛 O 至对岸 l_2 的通道 ABC （图中粗线部分折线段， B 在 A 右侧），为保护小岛， BC 段设计成与圆 O 相切，设 $\angle ABC=\pi-\theta(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}).$

（1）试将通道 ABC 的长 L 表示成 θ 的函数，并指出其定义域.

（2）求通道 ABC 的最短长.

.



19.（本小题满分 16 分）设数列$\{a_n\}$的前n项的和为S_n，且$S_n=\frac{n}{n+2}$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=\sqrt{2}$，且对任意正整数n都有$b_n,\sqrt{\frac{1}{a_n}},b_{n+1}$成等比数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式.

（2）证明数列$\{b_n\}$为等差数列.

（3）令$c_n=2\sqrt{2}b_n-3$，问是否存在正整数m,k，使得c_m,c_{m+5},c_k成等比数列？若存在，求出m,k的值，若不存在，说明理由.

20.（本小题满分 16 分）设$m\in R$，函数$f(x)=x^2+mx,g(x)=e^x$，$f'(x)$为$f(x)$的导函数

（1）若曲线$y=f'(x)$与曲线$y=g(x)$相切，求实数m的值；

（2）设函数$H(x)=\frac{f(x)}{g(x)},m\in(0,1)$，若$H(x_0)$为函数$H(x)$的极大值，且$x\in(k,k+1),k\in N^*$. ①求$k$的值； ②求证：对于$\forall x\in(k,k+1),H(x)<\frac{3}{e}$.

江苏省仪征中学 2019 届高三上学期数学周末限时训练 12 答案

一．填空题：

1. -2；2. $\frac{2}{5}$；3. $-\frac{3}{2}$；4. $(\frac{1}{2},+\infty)$；5. 8；6. $[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$；7. 7；8. $\frac{1023}{128}$；

9. $2x-3y-2\sqrt{5}=0$；10. $[-1,\frac{1}{2}]$；11. -5；12. $(1,3)$；13. $[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1]$；14. $2(\sqrt{3}+1)$.

二．解答题：

15. （1）在ΔABC中，设角A，B，C的对边分别为a，b，c，

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$及$\sin^2 A-\sin^2 B=(\sin A-\sin C)\sin C$得，

$a^2-b^2=ac-c^2$，即$a^2+c^2-b^2=ac$，……2 分

由余弦定理得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，……4 分

因为$0<B<\pi$，所以$B=\frac{\pi}{3}$．……6 分

（2）因为在ΔABC中，$\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，……8 分

所以$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，……10 分

$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=-\frac{1}{3}$，……12 分

而$2C=2(\pi-A-\frac{\pi}{3})=\frac{4\pi}{3}-2A$，

所以$\sin 2C=\sin(\frac{4\pi}{3}-2A)=\sin\frac{4\pi}{3}\cos 2A-\cos\frac{4\pi}{3}\sin 2A$

$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$．……14 分

16. 解：（1）因为图像与x轴相切，且$b>0$，所以$y=f(x)$的最小值为0，即$b=1$，又由最高点间距离为π，故$\frac{2\pi}{a}=\pi$，即$a=2$ ……4 分

（2）由（1）得$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$，当$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时，有$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$ ……8 分

当$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$时，即$x=\frac{\pi}{12}$，$f(x)$有最大值$2$；

当$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$时，即$x=\frac{\pi}{4}$，$f(x)$有最小值$\frac{3}{2}$ ……14 分

（规范阅卷说明：求最值时不交代x的值，各扣 1 分.）

17. 解：（1）因为直线 l 过点 $F_2(1,0)$，且斜率 $k=\sqrt{3}$，

所以直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$，即 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$，

所以圆心 $C(a,0)$ 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|\sqrt{3}a-\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}$，……2分

（也可以不加绝对值，因为 $a>1$）

又因为 $AB=2\sqrt{6}$，圆 C 的半径为 a，

所以 $(\dfrac{AB}{2})^2+d^2=a^2$，即 $6+\dfrac{3(a-1)^2}{4}=a^2$，

解之得，$a=3$ 或 $a=-9$（舍去）。……4分

所以 $b^2=a^2-c^2=8$，

所以所求椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$。……6分

（2）由（1）得，椭圆的右准线方程为 $m:x=9$，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{3}$，

则点 P 到右准线的距离为 $d=\dfrac{PF_2}{e}=\dfrac{\frac{10}{3}}{\frac{1}{3}}=10$，

所以 $9-x_P=10$，即 $x_P=-1$，……8分

把 $x_P=-1$ 代入椭圆方程 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 得，$y_P=\pm\dfrac{8}{3}$，

因为直线 l 的斜率 $k>0$，

所以 $y_P=-\dfrac{8}{3}$，$\therefore P(-1,-\dfrac{8}{3})$。……10分

（说明：①求点 $P(x,y)$ 时可以根据 $PF_2=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\dfrac{10}{3}$ 及点 $P(x,y)$ 在 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 上，联立方程组解得；②直接用焦半径公式求得 $x_P=-1$ 扣 1 份）

因为直线 l 经过 $F_2(1,0)$ 和 $P(-1,-\dfrac{8}{3})$，

所以直线 l 的方程为 $y=\dfrac{4}{3}(x-1)$，

联立方程组 $\begin{cases}y=\dfrac{4}{3}(x-1),\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1,\end{cases}$ 得 $3x^2-4x-7=0$，

解得 $x=-1$ 或 $x=\dfrac{7}{3}$，

所以 $Q(\dfrac{7}{3},\dfrac{16}{9})$，……12分

所以 ΔPQC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}CF_2\cdot(y_Q-y_P)=\dfrac{1}{2}\times2\times(\dfrac{16}{9}+\dfrac{8}{3})=\dfrac{40}{9}$。……14分

18. 解：（1）过 C 点作 $CD\perp l_1$ 于 D 点，

因为 $\angle ABC=\pi-\theta$，l_1 与 l_2 的距离为 7km，

所以 $\angle CBD=\theta$，$BC=\dfrac{7}{\cos\theta}$，　　……2分

以 O 为原点，建立如图所示的直角坐标系，

因为 $l_1\perp OA$，$OA=3\text{km}$，所以设 $B(x_0,-3)$，

则直线 BC 的方程为 $y+3=\tan\theta(x-x_0)$，即 $x\tan\theta-y-x_0\tan\theta-3=0$　　……4分

因为 BC 与圆 O 相切，圆 O 的半径为 2km，

所以 $\dfrac{|x_0\tan\theta+3|}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}=2$，

因为 $x_0\geq 0$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $x_0=\dfrac{2-3\cos\theta}{\sin\theta}$，

即 $AB=\dfrac{2-3\cos\theta}{\sin\theta}$，

所以 $L(\theta)=AB+BC=\dfrac{9-3\cos\theta}{\sin\theta}$，　　……8分

由于 $x_0=\dfrac{2-3\cos\theta}{\sin\theta}\geq 0$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\cos\theta\leq\dfrac{2}{3}$，

令 $\cos\theta_0=\dfrac{2}{3}$，$\theta_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

则因为函数 $y=\cos x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减，所以 $\theta_0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2}$，

即函数 $L(\theta)$ 的定义域为 $[\theta_0,\dfrac{\pi}{2})$．　　……10分

（另解：设 BC 与圆 O 的切点为 P，连接 OB，因为四点 O,A,B,P 共圆，所以 $\angle AOP=\theta$，

$OP=2$，所以由余弦定理得 $AP=\sqrt{OA^2+OP^2-2OA\cdot OP}$

$=\sqrt{13-12\cos\theta}$，由正弦定理得 $OB=\dfrac{AP}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{13-12\cos\theta}}{\sin\theta}$，

$AB=\sqrt{OB^2-OA^2}=\dfrac{2-3\cos\theta}{\sin\theta}$，同样要给出 $\cos\theta\leq\dfrac{2}{3}$ 的理由．）

（2）$L'(\theta)=\dfrac{3\sin^2\theta-(9-3\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{3-9\cos\theta}{\sin^2\theta}$，$\theta_0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2}$，　　……12分

令 $L'(\theta)=0$，得 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，则 $\theta=\theta'$，其中 $\theta'\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，且 $\cos\theta'=\dfrac{1}{3}$．

由 $\cos\theta'=\dfrac{1}{3}<\dfrac{2}{3}$，得 $\theta'\in(\theta_0,\dfrac{\pi}{2})$，

θ	(θ_0,θ')	θ'	$(\theta',\dfrac{\pi}{2})$
$L'(\theta)$	−	0	+
$L(\theta)$	↘	极小值	↗

……14分

所以当 $\theta=\theta'$ 时，$[L(\theta)]_{\min}=\dfrac{9-3\cos\theta'}{\sin\theta'}=\dfrac{9-3\times\dfrac{1}{3}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}}=6\sqrt{2}$，

即通道 ABC 的最短长为 $6\sqrt{2}\text{km}$．　　……16分

19.（1）解：因为数列$\{a_n\}$的前n项的和$S_n=\frac{n}{n+2}$，

所以当$n=1$时，$a_1=\frac{1}{3}$； ……1分

当$n\geq 2$且$k\in\mathbf{N}^*$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{n+2}-\frac{n-1}{n+1}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$， ……3分

当$n=1$时，上式也成立，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$. ……4分

（2）证明：因为对任意正整数n都有b_n，$\sqrt{\frac{1}{a_n}}$，b_{n+1}成等比数列，

所以$b_nb_{n+1}=\frac{1}{a_n}$，即$b_nb_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$， ……6分

所以$b_{n+1}b_{n+2}=\frac{(n+2)(n+3)}{2}$，

两式相除得，对任意正整数n都有$\frac{b_{n+2}}{b_n}=\frac{n+3}{n+1}$，

即$\frac{b_{n+2}}{n+3}=\frac{b_n}{n+1}$， ……8分

当n为奇数时，$\frac{b_n}{n+1}=\frac{b_1}{2}$，所以$b_n=\frac{b_1}{2}(n+1)=\frac{\sqrt{2}}{2}(n+1)$，

当n为偶数时，$\frac{b_n}{n+1}=\frac{b_2}{3}$，而$b_1b_2=\frac{2\times 3}{2}$，所以$b_2=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，

所以$b_n=\frac{b_2}{3}(n+1)=\frac{\sqrt{2}}{2}(n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$. ……10分

（另解：由$\frac{b_{n+2}}{b_n}=\frac{n+3}{n+1}$，分$n$为奇数和偶数，用叠乘也可以求得$b_n=\frac{\sqrt{2}}{2}(n+1)$）

所以$b_{n+1}-b_n=\frac{\sqrt{2}}{2}(n+2)-\frac{\sqrt{2}}{2}(n+1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以数列$\{b_n\}$为等差数列. ……12分

（3）因为$c_n=2\sqrt{2}b_n-3=2(n+1)-3=2n-1$，

所以$c_m=2m-1$，$c_{m+5}=2(m+5)-1=2m+9$，$c_k=2k-1$，

因此存在正整数m，k，使得c_m，c_{m+5}，c_k成等比数列

$\Leftrightarrow (2m+9)^2=(2m-1)(2k-1)$

$\Leftrightarrow 2k-1=\frac{(2m+9)^2}{2m-1}$，

$\Leftrightarrow k=m+10+\frac{50}{2m-1}$ ……14分

因为m，k都是正整数，则$2m-1=1$，5，25，

即$m=1$，3，13时，对应的$k=61$，23，25.

所以存在$\begin{cases}m=1,\\k=61\end{cases}$或$\begin{cases}m=3,\\k=23\end{cases}$或$\begin{cases}m=13,\\k=25,\end{cases}$使得$c_m$，$c_{m+5}$，$c_k$成等比数列. ……16分

20.（1）解：$y=f'(x)=2x+m$，$g'(x)=e^x$，

设切点为(x_1,e^{x_1})，则曲线$y=g(x)$在点(x_1,e^{x_1})处的切线方程为$y-e^{x_1}=e^{x_1}(x-x_1)$，

即$y=e^{x_1}x+e^{x_1}(1-x_1)$，　……2分

结合题设得$\begin{cases}e^{x_1}=2,\\ e^{x_1}(1-x_1)=m,\end{cases}$

所以$x_1=\ln 2$，$m=2-2\ln 2$，

所以实数m的值为$2-2\ln 2$．　……4分

（2）①解：$H(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2+mx}{e^x}$，$x\in\mathbf{R}$，

所以$H'(x)=\dfrac{2x+m-(x^2+mx)}{e^x}=\dfrac{-x^2+(2-m)x+m}{e^x}$，$x\in\mathbf{R}$，$m\in(0,1)$，

$\because\Delta=(2-m)^2+4m=m^2+4>0$，

$\therefore$由$H'(x)=0$，得$-x^2+(2-m)x+m=0$，

即$x^2-(2-m)x-m=0$两根为$x_1=\dfrac{(2-m)-\sqrt{m^2+4}}{2}$，

$x_2=\dfrac{(2-m)+\sqrt{m^2+4}}{2}$，　……6分

$\therefore H'(x)=\dfrac{-(x-x_1)(x-x_2)}{e^x}$，因此，

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

结合题设，有$x_0=x_2=\dfrac{(2-m)+\sqrt{m^2+4}}{2}$

$=1+\dfrac{\sqrt{m^2+4}-m}{2}=1+\dfrac{2}{\sqrt{m^2+4}+m}$，　……8分

易知函数$h(m)=1+\dfrac{2}{\sqrt{m^2+4}+m}$在区间$(0,1)$是减函数，

因此，$m\in(0,1)$时，$h(1)<x_0<h(0)$，即$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}<x_0<2$

$\because x_0\in(k,k+1)$，$k\in\mathbf{N}^*$，$k=1$．　……10分

另解：$H(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2+mx}{e^x}$，$x\in\mathbf{R}$，

所以$H'(x)=\dfrac{2x+m-(x^2+mx)}{e^x}=\dfrac{-x^2+(2-m)x+m}{e^x}$，$x\in\mathbf{R}$，$m\in(0,1)$，

由$H'(x)=0$，得$-x^2+(2-m)x+m=0$，即$x^2-(2-m)x-m=0$（*），

$\because\Delta=(2-m)^2+4m=m^2+4>0$，

$\therefore$方程（*）有两个不相等的实根，设为x_1，x_2，$x_1<x_2$，　……6分

则$H'(x)=\dfrac{-(x-x_1)(x-x_2)}{e^x}$，因此，

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

结合题设，有$x_0=x_2$，　……8分

令 $h(x)=x^2-(2-m)x-m$，则 $h(x)$ 在区间 $(\frac{2-m}{2},+\infty)$ 是增函数.

且 $x_0=x_2\in(\frac{2-m}{2},+\infty)$.

$\because \frac{2-m}{2}=1-\frac{m}{2}<1$，$h(1)=-1<0$，$h(2)=m>0$，且函数 $h(x)$ 图像不间断.

$\therefore x_0=x_2\in(1,2)$，$\because x_0\in(k,k+1)$，$k\in\mathbf{N}^*$，$\therefore k=1$. ……10 分

②证明：由由①，$x_0^2-(2-m)x_0-m=0$，$\therefore x_0^2+mx_0=2x_0+m$，

所以 $H(x_0)=\frac{x_0^2+mx_0}{e^{x_0}}=\frac{2x_0+m}{e^{x_0}}$，$x_0\in(1,2)$，$m\in(0,1)$， ……12 分

所以 $H'(x_0)=\frac{2-2x_0-m}{e^{x_0}}=\frac{2(1-x_0)-m}{e^{x_0}}<0$，

所以 $H(x_0)$ 在 $(1,2)$ 是减函数.

所以 $x_0\in(1,2)$ 时，$H(x_0)<H(1)=\frac{2+m}{e}<\frac{3}{e}$， ……14 分

由①，$x\in(1,2)$ 时，$[H(x)]_{\max}=H(x_0)$.

所以 $x\in(1,2)$ 时，$H(x)\le H(x_0)<\frac{3}{e}$，

即对于 $\forall x\in(k,k+1)$，$H(x)<\frac{3}{e}$ 成立. ……16 分