高二数学中档题小练（21.3.24）

一、单选题

1. i 是虚数单位，复数 z 满足 $\bar{z}(3-i)=10i$，则 $z=$ （　）

A．$3+\mathrm{i}$　　B．$3-i$　　C．$-1+3i$　　D．$-1-3i$

2. 已知 $y=\frac{1}{3}x^3+bx^2+(b+2)x+3$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数，则实数 b 的取值范围是 （　）

A. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

C. $(-1,2)$　　D. $[-1,2]$

3. 曲线 $y=2\ln x$ 上的点到直线 $2x-y+3=0$ 的最短距离为 （　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $3\sqrt{5}$　　D. 2

4. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1A=A_1D_1=2\sqrt{3}$，$AB=3$，E 为棱 AA_1 的中点，F 是棱 AB 上的点，$AF:FB=1:2$，则异面直线 EF 与 BC_1 所成角的余弦值为 （　）

A. $-\frac{\sqrt{6}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　D. $-\frac{\sqrt{10}}{4}$

5. 已知定义域为 R 的奇函数 $y=f(x)$ 的导函数为 $y'=f'(x)$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，若 $a=\frac{f(e)}{e}$，$b=\frac{f(\ln 2)}{\ln 2}$，$b=-\frac{f(-3)}{3}$，则 a,b,c 的大小关系正确的是 （　）

A．$a<c<b$　　B．$b<c<a$　　C．$a<b<c$　　D．$c<a<b$

6. 若函数 $f(x)=\ln x(0<x\le 1)$ 与 $g(x)=x^2+a$ 有两条公切线，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $\left(-\ln\sqrt{2}-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(-\ln\sqrt{2}-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$　　C. $\left(-\ln\sqrt{2},-\frac{3}{4}\right]$　　D. $\left(-\ln\sqrt{2}-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right]$

二、多选题

7. 已知复数 $z=(a-i)(3+2i)(a\in R)$ 的实部为 -1，则下列说法正确的是 （　）

A．复数 z 的虚部为 -5　　B．复数 z 的共轭复数 $\bar{z}=1-5i$

C．$|z|=\sqrt{26}$　　D．z 在复平面内对应的点位于第三象限

8. 关于函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$，下列判断正确的是 （　）

A．$x=2$ 是 $f(x)$ 的极大值点　　B．函数 $y=f(x)-x$ 有且只有 1 个零点

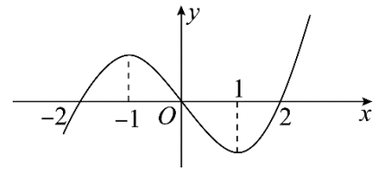
C．存在正实数 k，使得 $f(x)>kx$ 成立

D．对任意两个正实数 x_1，x_2，且 $x_1>x_2$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2>4$.

三、填空题

9. 复数 z 满足 $|z-2+i|=1$，则 $|z+1-2i|$ 的最小值为_____.

10. 已知 R 上可导函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则不等式 $(x-1)f'(x)>0$ 的解集 _____



四、解答题

11. 已知复数 $z_1=1+mi$，$z_2=2+3i(m\in R)$.

（1）若 $m=-1$，且 $(2-3i)z_1+z_2=x+yi$，求实数 x,y 的值；

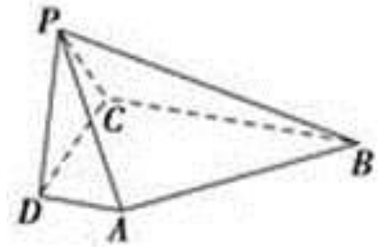
（2）若 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数，且 $z=z_1-i\cdot\overline{z_2}$，求复数 z 的模.

12. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD\perp$ 平面 PDC，$AD//BC$，$PD\perp PB$，$AD=1$，$BC=3$，$CD=4$，$PD=2$.

（1）求异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值；

（2）求证：$PD\perp$ 平面 PBC；

（3）求直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值.



13. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax+1$.

（1）当 $a=1$ 时，求证：$f(x)\le 0$ 恒成立；

（2）若关于 x 的方程 $f(x)+x^2+1=0$ 至少有两个不相等的实数根，求实数 a 的最小值.

高二数学中档题小练（答案）（21.3.24）

一、单选题

1. i 是虚数单位，复数 z 满足 $\bar{z}(3-i)=10i$，则 $z=$ （ ）D

A．$3+\mathrm{i}$　　B．$3-i$　　C．$-1+3i$　　D．$-1-3i$

2. 已知$y=\frac{1}{3}x^3+bx^2+(b+2)x+3$是$\mathbf{R}$上的单调增函数，则实数 b 的取值范围是 （ ）D

A. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

C. $(-1,2)$　　D. $[-1,2]$

3. 曲线 $y=2\ln x$ 上的点到直线$2x-y+3=0$的最短距离为 （ ）A

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $3\sqrt{5}$　　D. 2

4. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$A_1A=A_1D_1=2\sqrt{3}$，$AB=3$，E 为棱AA_1的中点，F 是棱 AB 上的点，$AF:FB=1:2$，则异面直线 EF 与BC_1所成角的余弦值为 （ ）B

A. $-\frac{\sqrt{6}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　D. $-\frac{\sqrt{10}}{4}$

5. 已知定义域为 R 的奇函数 $y=f(x)$ 的导函数为 $y'=f'(x)$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，若 $a=\dfrac{f(e)}{e}$，$b=\dfrac{f(\ln 2)}{\ln 2}$，$b=-\dfrac{f(-3)}{3}$，则 a,b,c 的大小关系正确的是 （ ）D

A．$a<c<b$　　B．$b<c<a$　　C．$a<b<c$　　D．$c<a<b$

6. 若函数 $f(x)=\ln x(0<x\le 1)$与 $g(x)=x^2+a$ 有两条公切线，则实数 a 的取值范围是（ D ）

A．$\left(-\ln\sqrt{2}-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B．$\left(-\ln\sqrt{2}-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$　　C．$\left(-\ln\sqrt{2},-\frac{3}{4}\right]$　　D．$\left(-\ln\sqrt{2}-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right]$

二、多选题

7. 已知复数 $z=(a-i)(3+2i)(a\in R)$ 的实部为 -1，则下列说法正确的是 （ ）ACD

A．复数 z 的虚部为 -5　　B．复数 z 的共轭复数 $\bar{z}=1-5i$

C．$|z|=\sqrt{26}$　　D．z 在复平面内对应的点位于第三象限

8. 关于函数 $f(x)=\dfrac{2}{x}+\ln x$，下列判断正确的是（ ）BD

A．$x=2$ 是 $f(x)$ 的极大值点　　B．函数 $y=f(x)-x$ 有且只有 1 个零点

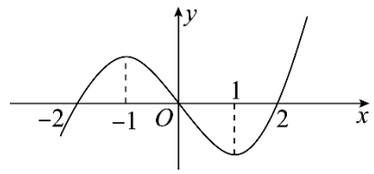
C．存在正实数 k，使得 $f(x)>kx$ 成立

D．对任意两个正实数 x_1，x_2，且 $x_1>x_2$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2>4$.

三、填空题

9. 复数 z 满足 $|z-2+i|=1$，则 $|z+1-2i|$ 的最小值为_____．$3\sqrt{2}-1$

10. 已知 R 上可导函数$f(x)$的图象如图所示，则不等式 $(x-1)f'(x)>0$的解集 _____．$(-1,1)\cup(1,+\infty)$



四、解答题

11. 已知复数$z_1=1+mi$，$z_2=2+3i(m\in R)$.

（1）若$m=-1$，且$(2-3i)z_1+z_2=x+yi$，求实数x,y的值；

（2）若$\frac{z_1}{z_2}$为纯虚数，且$z=z_1-i\cdot\overline{z_2}$，求复数 z 的模.

解：$(1)m=-1$时，$(2-3i)z_1+z_2=(2-3i)(1-i)+2+3i=1-2i=x+yi$，

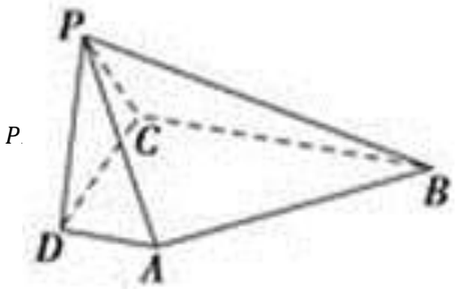
故$\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$;

$(2)\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+mi}{2+3i}=\frac{(1+mi)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{2+3m}{13}+\frac{2m-3}{13}i$，

若$\frac{z_1}{z_2}$为纯虚数，则$\begin{cases}\frac{2+3m}{13}=0\\\frac{2m-3}{13}\neq 0\end{cases}$,解得$m=-\frac{2}{3}$,

$z=z_1-i\cdot\overline{z_2}=(1-\frac{2}{3}i)-i(2-3i)=-2-\frac{8}{3}i$，$|z|=\sqrt{(-2)^2+(-\frac{8}{3})^2}=\frac{10}{3}$.

12. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$AD\perp$平面 PDC，$AD//BC$，$PC=CD=4$，$PD=2$.

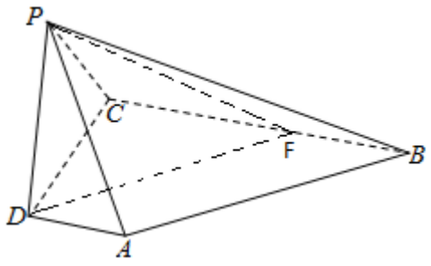


（1）求异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值；

（2）求证：$PD\perp$平面 PBC；

（3）求直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值.

【答案】(Ⅰ)解：如图，



由已知$AD//BC$，故$\angle DAP$或其补角即为异面直线 AP 与 BC 所成的角，

因为$AD\perp$平面 PDC，$PD\subset$平面 PDC，所以$AD\perp PD$，

在$Rt\triangle PDA$中，由已知，得$AP=\sqrt{AD^2+PD^2}=\sqrt{5}$，故$\cos\angle DAP=\frac{AD}{AP}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以，异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$；

(Ⅱ)证明：因为$AD\perp$平面 PDC，$PD\subset$平面 PDC，所以$AD\perp PD$，

又因为$BC//AD$，所以$PD\perp BC$，

又$PD\perp PB$，$PB\cap BC=B$，PB，$BC\subset$平面 PBC，所以$PD\perp$平面 PBC；

(Ⅲ)解：过点 D 作 AB 的平行线交 BC 于点 F，连接 PF，

则 DF 与平面 PBC 所成的角等于 AB 与平面 PBC 所成的角，

因为$PD\perp$平面 PBC，故 PF 为 DF 在平面 PBC 上的射影，

所以$\angle DFP$为直线 DF 和平面 PBC 所成的角，

由于$AD//BC$，$DF//AB$，所以四边形 $ABFD$ 为平行四边形，故 $BF=AD=1$，

由已知，得$CF=BC-BF=2$，

因为$AD\perp$平面 PDC，$DC\subset$平面 PDC，$\therefore AD\perp DC$，又$AD//BC$，故 $BC\perp DC$，

$\therefore DF=\sqrt{DC^2+CF^2}=2\sqrt{5}$，

在$Rt\triangle DPF$中，可得$\sin\angle DFP=\frac{PD}{DF}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

13. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax+1$.

（1）当$a=1$时，求证：$f(x)\le 0$恒成立；

（2）若关于 x 的方程 $f(x)+x^2+1=0$ 至少有两个不相等的实数根，求实数 a 的最小值.

解（1）$f(x)_{\max}=f(1)=0$，$\therefore f(x)\le 0$.

（2）$f(x)+x^2+1=0$ 至少有两个不相等的实数根，

即 $\ln x+x^2-ax+2=0$，$a=\frac{\ln x}{x}+x+\frac{2}{x}$至少有两个不相等的实数根，

记 $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}+x+\frac{2}{x}(x>0)$，$\therefore\ \varphi'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+1-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-\ln x-1}{x^2}$，

记 $h(x)=x^2-\ln x-1(x>0)$，$\therefore h'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$，令 $h'(x)=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$舍去)，

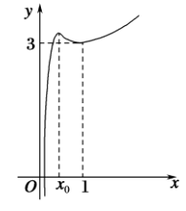
$\therefore$当 $x\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，$x\in(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

$\therefore h(x)$的最小值为 $h(\frac{\sqrt{2}}{2})=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})-1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2=-\frac{1}{2}(1-\ln 2)<0$，

又 $h(1)=0$，所以 $x\in(1,+\infty)$时，$h(x)>0$，

又当 $x=\frac{1}{e}$时，$h(\frac{1}{e})=\frac{1}{e^2}-\ln\frac{1}{e}-1=\frac{1}{e^2}+1-1=\frac{1}{e^2}>0$，因此必存在唯一的 $x_0\in(\frac{1}{e},\frac{\sqrt{2}}{2})$，使得 $h(x_0)=0$.

$\therefore x\in(0,x_0)$时，$h(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增，$x\in(x_0,1)$时，$h(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减，$x\in(1,+\infty)$时，$h(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增，画出 $y=\varphi(x)$的大致图象，如图所示.



$\therefore$当 $\varphi(1)\le a\le\varphi(x_0)$时，直线 $y=a$ 与 $y=\varphi(x)$的图象至少有两个交点，

$\therefore a$ 的最小值为 $\varphi(1)=3$.