

用基本不等式解决应用题

例 1. 某工厂利用辐射对食品进行灭菌消毒, 现准备在该厂附近建一职工宿舍, 并对宿舍进行防辐射处理, 建房防辐射材料的选用与宿舍到工厂距离有关. 若建造宿舍的所有费用 p (万元) 和宿舍与工厂的距离 $x(km)$ 的关系为: $p = \frac{k}{3x+5} (0 \leq x \leq 8)$, 若距离为 $1km$ 时, 测算宿舍建造费用为 100 万元. 为了交通方便, 工厂与宿舍之间还要修一条道路, 已知购置修路设备需 5 万元, 铺设路面每公里成本为 6 万元, 设 $f(x)$ 为建造宿舍与修路费用之和.

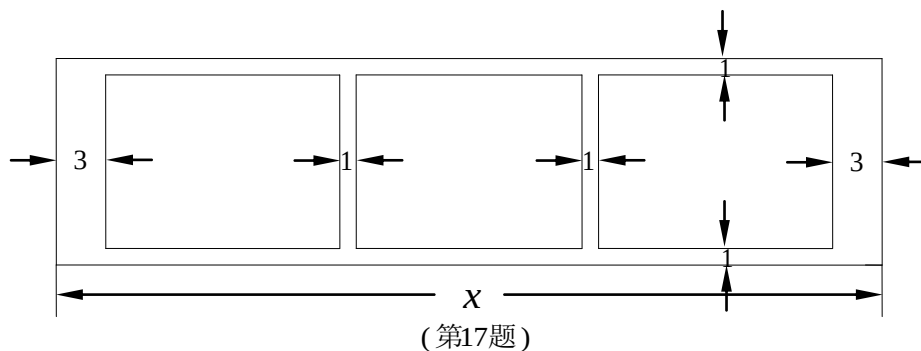
(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 宿舍应建在离工厂多远处, 可使总费用 $f(x)$ 最小, 并求最小值.

变式: 某学校为了支持生物课程基地研究植物生长, 计划利用学校空地建造一间室内面积为 $900m^2$ 的矩形温室, 在温室内划出三块全等的矩形区域, 分别种植三种植物, 相邻矩形区域之间间隔 $1m$, 三块矩形区域的前、后与内墙各保留 $1m$ 宽的通道, 左、右两块矩形区域分别与相邻的左右内墙保留 $3m$ 宽的通道, 如图. 设矩形温室的室内长为 $x (m)$, 三块种植植物的矩形区域的总面积为 $S (m^2)$.

(1) 求 S 关于 x 的函数关系式;

(2) 求 S 的最大值.



17. 解: (1) 由题设, 得

$$S = (x-8)\left(\frac{900}{x} - 2\right) = -2x - \frac{7200}{x} + 916, \quad x \in (8, 450). \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } 8 < x < 450, \text{ 所以 } 2x + \frac{7200}{x} \geq 2\sqrt{2x \times \frac{7200}{x}} = 240, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

当且仅当 $x = 60$ 时等号成立. \dots\dots\dots 10 分

从而 $S \leq 676$. \dots\dots\dots 12 分

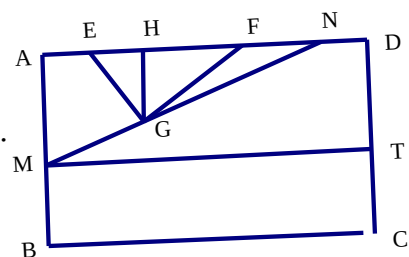
答：当矩形温室的室内长为 60 m 时，三块种植植物的矩形区域的总面积最大，最大为 676m^2 . \dots\dots\dots 14 分

例 2. 某小区想利用一矩形空地 $ABCD$ 建市民健身广场，设计时决定保留空地边上的一水塘（如图中阴影部分），水塘可近似看作一个等腰直角三角形，其中 $AD = 60\text{m}$ ， $AB = 40\text{m}$ ，且 $\triangle EFG$ 中， $\angle EGF = 90^\circ$ ，经测量得到 $AE = 10\text{m}$ ， $EF = 20\text{m}$ 。为保证安全同时考虑美观，

健身广场周围准备加设一个保护栏。设计时经过点 G 作一直线交 AB, DF 于 M, N ，从而得到五边形 $MBCDN$ 的市民健身广场，设 $DN = x(\text{m})$ 。

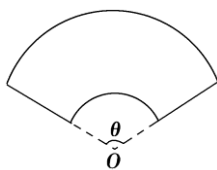
(1) 将五边形 $MBCDN$ 的面积 y 表示为 x 的函数；

(2) 当 x 为何值时，市民健身广场的面积最大？并求出最大面积。



变式. 某单位拟建一个扇环面形状的花坛(如图所示)，该扇环面是由以点 O 为圆心的两个同心圆弧和延长后通过点 O 的两条直线段围成. 按设计要求扇环面的周长为 30 米，其中大圆弧所在圆的半径为 10 米. 设小圆弧所在圆的半径

为 x 米，圆心角为 θ (弧度).



(1)求 θ 关于 x 的函数关系式;

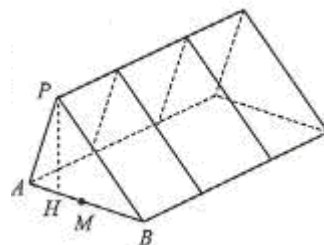
(2)已知在花坛的边缘(实线部分)进行装饰时,直线部分的装饰费用为 4 元/米,弧线部分的装饰费用为 9 元/米. 设花坛的面积与装饰总费用的比为 y , 求 y 关于 x 的函数关系式, 并求出 x 为何值时, y 取得最大值?

18、(本题满分 16 分)

如图所示,把一些长度均为 4 米 ($PA+PB=4$ 米)的铁管折弯后当作骨架制作“人字形”帐篷,根据人们的生活体验知道:人在帐篷里“舒适感” k 与三角形的底边长和底边上的高度有关,设 AB 为 x , AB 边上的高 PH 为 y , 则 $k = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 若 k 越大,则“舒适感”越好。

(I) 求“舒适感” k 的取值范围;

(II) 已知 M 是线段 AB 的中点, H 在线段 AB 上, 设 $MH=t$, 当人在帐篷里的“舒适感” k 达到最大值时, 求 y 关于自变量 t 的函数解析式; 并求出 y 的最大值 (请说明详细理由)。



由 $\overrightarrow{AF} = 7\overrightarrow{FB}$, 得 $a + c = 7(a - c)$, 得 $3a = 4c$. (1)

由准线方程, 得 $\frac{a^2}{c} = \frac{16}{3}$. (2) 2 分

解(1)(2)得 $a = 4, c = 3$. $\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 7$ 5 分

$\therefore$ 所求椭圆 E 的标准方程为: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 6 分

(II) 设 M 坐标为 (x, y) , 由 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$, 即 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$, 得

$(x + 4)(3 - x) - y^2 = 0$, $\therefore y^2 = -x^2 - x + 12$ 8 分

又点 M 满足 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$, 消 y 得: $9x^2 + 16x - 80 = 0$,

解得 $x = \frac{20}{9}$ 或 $x = -4$ (舍去). 11 分

将 A, M, N 的横坐标代入 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MN}$, 得 $\frac{20}{9} + 4 = \lambda(\frac{16}{3} - \frac{20}{9})$,

$\therefore \lambda = 2$ 14 分

18. (I) $k = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{1 + \frac{2xy}{x^2+y^2}}$, 2 分

$\because x^2 + y^2 \geq 2xy$, $\therefore \frac{2xy}{x^2+y^2} \leq 1$, (当 $x = y$ 时, 取“=”号)

$\therefore k \leq \sqrt{2}$ 4 分

$\because \frac{2xy}{x^2+y^2} > 0$, $\therefore k > 1$,

$\therefore k$ 的取值范围是 $(1, \sqrt{2}]$ 6 分

(II) 由 $PA + PB = 4$ 及 (I) 的结论, 得 $\sqrt{(\frac{1}{2}y+t)^2 + y^2} + \sqrt{(\frac{1}{2}y-t)^2 + y^2} = 4$, 8 分

$\therefore \sqrt{(\frac{1}{2}y+t)^2 + y^2} = 4 - \sqrt{(\frac{1}{2}y-t)^2 + y^2}$.

两边平方、化简得 $y = 4\sqrt{\frac{4-t^2}{20-t^2}}$, 10 分

当 H 与 M 重合时, $t = 0$,

当 H 与 A 重合时, 有 $PA = AB = y$, $\therefore y^2 + y^2 = (4 - y)^2$,

$\therefore y = 4\sqrt{2} - 4$, 即 $t = 2\sqrt{2} - 2$, 12 分

$\therefore y = 4\sqrt{1 - \frac{16}{20-t^2}} (0 \leq t \leq 2\sqrt{2} - 2)$ 13 分

$\because 0 \leq t \leq 2\sqrt{2} - 2$, $\therefore \frac{16}{20-t^2} \in [\frac{4}{5}, 2\sqrt{2} - 2]$,

$\therefore 1 - \frac{16}{20-t^2} \in [3 - 2\sqrt{2}, \frac{1}{5}]$, 15 分

$\therefore y_{\max} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, 此时 $t = 0$ 16 分

17. (本小题满分 14 分)

某公司生产的某批产品的销售量 P 万件 (生产量与销售量相等) 与促销费用 x 万元满足

$$P = \frac{x+2}{4} \quad (\text{其中 } 0 \leq x \leq a, a \text{ 为正常数}). \text{ 已知生产该批产品还要投入成本 } 6(P + \frac{1}{P})$$

万元（不包含促销费用），产品的销售价格定为 $(4 + \frac{20}{p})$ 元/件.

(1)将该产品的利润 y 万元表示为促销费用 x 万元的函数；

(2)当促销费用投入多少万元时，该公司的利润最大？

平面 $BDFE \cap$ 平面 $ABCD = BD$ ，平面 $BDFE \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = EF$ ，

所以 $EF \parallel BD$ ，从而 $EF \parallel B_1D_1$7 分

(2) 证明：由于四边形 BB_1D_1D 是矩形，所以 $BD \perp B_1B$ ，

又 $A_1A \parallel B_1B$ ，

$\therefore BD \perp A_1A$9 分

又四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD \perp AC$.

$\because AC \cap A_1A = A$ ， $AC \subset$ 平面 A_1C_1CA ， $A_1A \subset$ 平面 A_1C_1CA ，

$\therefore BD \perp$ 平面 A_1C_1CA12 分

$\because BD \subset$ 平面 $BDFE$ ，

$\therefore$ 平面 $BDFE \perp$ 平面 A_1C_1CA14 分

17. （本小题满分 14 分）

解：（1）由题意知， $y = (4 + \frac{20}{p})p - x - 6(p + \frac{1}{p})$ 3 分

将 $P = \frac{x+2}{4}$ 代入化简得：

$y = 19 - \frac{24}{x+2} - \frac{3}{2}x$ ($0 \leq x \leq a$). 5 分

$$(2) y = 22 - \frac{3}{2} \left(\frac{16}{x+2} + x + 2 \right) \leq 22 - 3 \sqrt{\frac{16}{x+2} \times (x+2)} = 10,$$

当且仅当 $\frac{16}{x+2} = x+2$, 即 $x=2$ 时, 上式取等号. 8 分

当 $a \geq 2$ 时, 促销费用投入 2 万元时, 厂家的利润最大; 9 分

$$y = 19 - \frac{24}{x+2} - \frac{3}{2}x, \quad y' = \frac{24}{(x+2)^2} - \frac{3}{2},$$

当 $x < 2$ 时, $y' > 0$, 此时函数 y 在 $[0, 2]$ 上单调递增,

所以当 $a < 2$ 时, 函数 y 在 $[0, a]$ 上单调递增, 11 分

所以 $x=a$ 时, 函数有最大值.

即促销费用投入 a 万元时, 厂家的利润最大. 12 分

综上, 当 $a \geq 2$ 时, 促销费用投入 2 万元, 厂家的利润最大;

当 $a < 2$ 时促销费用投入 a 万元, 厂家的利润最大. 14 分

18. (本小题满分 16 分)

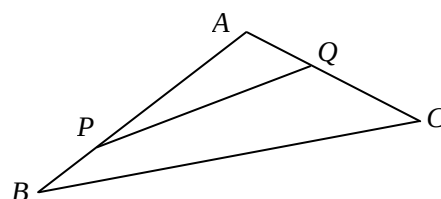
解 (1) 当 $m=0$ 时, 直线 $l: y=kx$ 代入椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的方程,

得到 $x^2 + 2k^2x^2 = 4$, 2 分

17. 如图, 某生态园将一三角形地块 ABC 的一角 APQ 开辟为水果园种植桃树, 已知角 A 为 120° , AB, AC 的长度均大于 200 米, 现在边界 AP, AQ 处建围墙, 在 PQ 处围竹篱笆.

(1) 若围墙 AP, AQ 总长度为 200 米, 如何围可使得三角形地块 APQ 的面积最大?

(2) 已知 AP 段围墙高 1 米, AQ 段围墙高 1.5 米, 造价均为每平方米 100 元. 若围围墙用了 20000 元, 问如何围可使竹篱笆用料最省?



17. 解 设 $AP=x$ 米, $AQ=y$ 米.

(1) 则 $x+y=200$, $\triangle APQ$ 的面积

$$S = \frac{1}{2}xy \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}xy. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2) 由题意得 $100 \times (1 \cdot x + 1.5 \cdot y) = 20000$, 即 $x + 1.5y = 200$8 分
 要使竹篱笆用料最省, 只需其长度 PQ 最短, 所以
 $PQ^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ = x^2 + y^2 + xy$
 $= (200 - 1.5y)^2 + y^2 + (200 - 1.5y)y$
 $= 1.75y^2 - 400y + 40000 \quad (0 < y < \frac{400}{3})$ 11 分
 当 $y = \frac{800}{7}$ 时, PQ 有最小值 $\frac{200\sqrt{21}}{7}$, 此时 $x = \frac{200}{7}$13 分
 答: (1) 当 $AP = AQ = 100$ 米时, 三角形地块 APQ 的面积最大为 $2500\sqrt{3}$ 平方米;
 (2) 当 $AP = \frac{200}{7}$ 米, $AQ = \frac{800}{7}$ 米时, 可使竹篱笆用料最省. 14 分
 $\therefore S \leq \frac{\sqrt{3}}{4} (\frac{x+y}{2})^2 = 2500\sqrt{3}$.
 当且仅当 $x = y = 100$ 时取“=”.6 分
 (注: 不写“=”成立条件扣 1 分)

18. (16 分) 某油库的设计容量是 30 万吨, 年初储量为 10 万吨, 从年初起计划每月购进石油 m 万吨, 以满足区域内和区域外的需求, 若区域内每月用石油 1 万吨, 区域外前 x 个月的需求量 y (万吨) 与 x 的函数关系为 $y = \sqrt{2px}$ ($p > 0, 1 \leq x \leq 16, x \in \mathbb{N}^*$), 并且前 4 个月, 区域外的需求量为 20 万吨.

(1) 试写出第 x 个月石油调出后, 油库内储油量 M (万吨) 与 x 的函数关系式;

(2) 要使 16 个月内每月按计划购进石油之后, 油库总能满足区域内和区域外的需求, 且每月石油调出后, 油库的石油剩余量不超过油库的容量, 试确定 m 的取值范围.

【考点】根据实际问题选择函数类型.

【专题】应用题; 函数的性质及应用.

【分析】(1) 利用前 4 个月, 区域外的需求量为 20 万吨, 求出 p , 可得 $y = 10\sqrt{x}$ ($1 \leq x \leq 16, x \in \mathbb{N}^*$), 即可求出第 x 个月石油调出后, 油库内储油量 M (万吨) 与 x 的函数关系式;

(2) 由题意 $0 \leq mx - x - 10\sqrt{x} + 10 \leq 30$ ($1 \leq x \leq 16, x \in \mathbb{N}^*$), 分离参数求最值, 即可得出结论.

【解答】解: (1) 由题意, $20 = \sqrt{2p \cdot 4}$, $\therefore 2p = 100$,

$\therefore y = 10\sqrt{x}$ ($1 \leq x \leq 16, x \in \mathbb{N}^*$),

$\therefore$ 油库内储油量 $M = mx - x - 10\sqrt{x} + 10$ ($1 \leq x \leq 16, x \in \mathbb{N}^*$);

(2) $\therefore 0 \leq M \leq 30$,

$\therefore 0 \leq mx - x - 10\sqrt{x} + 10 \leq 30$ ($1 \leq x \leq 16, x \in \mathbb{N}^*$),

$$\therefore \begin{cases} m \geq -\frac{10}{x} + \frac{10}{\sqrt{x}} + 1 \\ m \leq \frac{20}{x} + \frac{10}{\sqrt{x}} + 1 \end{cases} \quad (1 \leq x \leq 16, x \in \mathbb{N}^*) \text{ 恒成立.};$$

$$\text{设 } \frac{1}{\sqrt{x}} = t, \text{ 则 } \frac{1}{4} \leq t \leq 1, \begin{cases} m \geq -10t^2 + 10t + 1 \\ m \leq 20t^2 + 10t + 1 \end{cases}.$$

$$\text{由 } -10t^2 + 10t + 1 = -10\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} \quad (x=4 \text{ 时取等号}), \text{ 可得 } m \geq \frac{7}{2},$$

$$\text{由 } 20t^2 + 10t + 1 = 20\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad (x=16 \text{ 时取等号}), \text{ 可得 } m \leq \frac{19}{4},$$

$$\therefore \frac{7}{2} \leq m \leq \frac{19}{4}.$$

17. 某单位有员工 1000 名, 平均每人每年创造利润 10 万元. 为了增加企业竞争力, 决定优化产业结构, 调整出 x ($x \in \mathbb{N}^*$) 名员工从事第三产业, 调整后他们平均每人每年创造利润为 $10\left(a - \frac{3x}{500}\right)$ 万元 ($a > 0$), 剩下的员工平均每人每年创造的利润可以提高 $0.2x\%$.

(1) 若要保证剩余员工创造的年总利润不低于原来 1000 名员工创造的年总利润, 则最多调整出多少名员工从事第三产业?

(2) 在 (1) 的条件下, 若调整出的员工创造的年总利润始终不高于剩余员工创造的年总利润, 则 a 的取值范围是多少?

考点: 基本不等式在最值问题中的应用; 函数模型的选择与应用.

专题: 计算题; 应用题.

分析: (1) 根据题意可列出 $10(1000 - x)(1 + 0.2x\%) \geq 10 \times 1000$, 进而解不等式求得 x 的范围, 确定问题的答案.

(2) 根据题意分别表示出从事第三产业的员工创造的年总利润和从事原来产业的员工的年总利润, 进而根据题意建立不等式, 根据均值不等式求得求 a 的范围.

解答: 解: (1) 由题意得: $10(1000 - x)(1 + 0.2x\%) \geq 10 \times 1000$,
即 $x^2 - 500x \leq 0$, 又 $x > 0$, 所以 $0 < x \leq 500$.
即最多调整 500 名员工从事第三产业.

(2) 从事第三产业的员工创造的年总利润为 $10\left(a - \frac{3x}{500}\right)x$ 万元,

从事原来产业的员工的年总利润为 $10(1000 - x)\left(1 + \frac{1}{500}x\right)$ 万元,

则 $10\left(a - \frac{3x}{500}\right)x \leq 10(1000 - x)\left(1 + \frac{1}{500}x\right)$

所以 $ax - \frac{3x^2}{500} \leq 1000 + 2x - x - \frac{1}{500}x^2$,

所以 $ax \leq \frac{2x^2}{500} + 1000 + x$,

即 $a \leq \frac{2x}{500} + \frac{1000}{x} + 1$ 恒成立,

因为 $\frac{2}{500}x + \frac{1000}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2x \cdot 1000}{500 \cdot x}} = 4$,

当且仅当 $\frac{2x}{500} = \frac{1000}{x}$, 即 $x=500$ 时等号成立.

所以 $a \leq 5$, 又 $a > 0$, 所以 $0 < a \leq 5$,
即 a 的取值范围为 $(0, 5]$.