令 $g(x)=\frac{\sin x}{x}$, $g'(x)=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}(x\neq\frac{\pi}{2})$, 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时, 因为 $\cos x>0$, $\tan x>x$, 所以 $g'(x)<0$; 当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时, 因为 $\cos x<0$, $\tan x<0$, $x-\tan x>0$, 所以 $g'(x)<0$; 又因为 $g(x)$在$(0,\pi)$上连续, 所以 $g(x)$在$(0,\pi)$上单调递减.

又因为 $0<(1-y)x<x<\pi$, 所以 $g(1-y)x>g(x)$, 即 $\frac{\sin(1-y)x}{(1-y)x}-\frac{\sin x}{x}>0$, 又因为 $\frac{y^2}{(1-y)^2}\cdot\frac{\sin x}{x}>0$, 所以当 $x\in[0,\pi]$, $y\in[0,1]$时, $f(x,y)>0$. 其次, 当 $x=0$ 时, $f(x,y)=0$; 当 $y=0$ 时, $f(x,y)=0$; 当 $x=\pi$ 时, $f(x,y)=(1-y)\sin(1-y)\pi\geqslant 0$, 此时若 $y=1$, 则 $f(x,y)=-\sin x+\sin x=0$. 综上所述, 当且仅当 $x=0$ 或 $y=0$ 或 $x=\pi$ 且 $y=1$ 时, $f(x,y)=0$ 取到最小值 0.

总之, 在学习导数章节时, 应关注以上五个意识. 其中意识一:多次构造函数的意识, 还是强调数学知识本身, 因为导数知识最大的作用就是其在解决问题中的工具性, 主要体现在利用导数研究函数的性质, 前提条件就是构造恰当的函数. 意识二:利用导数的几何意义的思想, 导数值就是函数图像切线的斜率, 如果再去研究切线斜率的单调性, 即是去研究导函数的导数值的正负, 其本质上就是研究函数的凹凸性. 意识三:构造函数解决不等式问题的意识, 则侧重于强调知识的应用性, 利用导数求解出函数的最值, 从中提炼出不等式并进行应用. 意识四:构造零点设而不求的意识, 是直面超越方程不能求解的问题, 充分利用方程的等价条件解决问题. 意识五:逆向分析的构造意识, 是由题目要解决的结论出发, 寻找结论与已知的联系. 强调以导数知识为载体, 对人的思维方式产生的影响, 这就是我们所说的学科育人. 可以发现, 本文中强调的五个意识之间是相辅相成、层层递进的关系, 其过程是从知识本身到知识的升华、知识的应用, 最后达到学科育人的目的.

数学解题教学要“三悟”

福建省古田县第一中学　(352200)　兰诗全

解题教学是数学教学的重要组成部分, 师生要在解题思维互动生成中有感悟、品悟、领悟. 感悟出知识的来龙去脉, 品悟出解题中的具体方法和规律, 领悟出其中蕴涵的数学本质与思想, 在悟中让课堂充满思辨, 在悟中让知识得以延伸, 在悟中揭示问题本质让数学思想得到升华. 通过解题反思, 要能悟出智慧, 悟出真理, 这是解题教学的核心与关键.

1　悟错因

在数学教学过程中, 经常会发现学生在解题中犯下各种各样的错误, 事后师生都在努力纠错, 教师讲得累, 学生纠得苦, 可是效果却不明显, 到下次解题时又重复“昨天的故事”. 为什么呢? 一大关键是学生没有深层次地找到错误的真正原因, 没有一个与错误作“斗争”的过程, 对错误原因没有追根溯源, 没有揭示问题的本质, 一错再错成必然.

例 1　若 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, 且当 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ x+y\leqslant 1\end{cases}$ 时, 恒有 $ax+by\leqslant 1$, 求以 a,b 为坐标的点 $P(a,b)$ 所形成平面区域的面积.

解法 1:画出不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ x+y\leqslant 1\end{cases}$ 对应的平面区域(图略). 由题意得, 对该区域内的任意点(x,y), 不等式 $ax+by\leqslant 1$ 恒成立, 即该区域恒在直线 $ax+by=1$ 的下方, 所以 $\begin{cases}\frac{1}{a}\geqslant 1,\\ \frac{1}{b}\geqslant 1,\\ a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0\leqslant a\leqslant 1,\\ 0\leqslant b\leqslant 1,\end{cases}$ 从而以 a,b 为坐标的点 $P(a,b)$ 所形成的平面区域是一个正方形, 其面积为 1.

解法 2:设 $\vec{m}=(a,b)$, $\vec{n}=(x,y)$, 向量 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 θ, 由 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, 且 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, 得 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 不等式 $ax+by\leqslant 1$ 恒成立等价于 $\vec{m}\cdot\vec{n}=ax+by=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos\theta\leqslant 1$ 恒成立, 当 $\sqrt{x^2+y^2}=0$ 或 $\cos\theta=0$ 时, 上式显然成立. 当 $\sqrt{x^2+y^2}\neq 0$ 且 $\cos\theta\neq 0$ 时, 可得 $\sqrt{a^2+b^2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos\theta}$ 恒成

立,即 $\sqrt{a^2+b^2}\leqslant(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos\theta})_{\min}$,又 $(\sqrt{x^2+y^2})_{\max}=1$,$(\cos\theta)_{\max}=1$,所以 $(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos\theta})_{\min}=1$,即 $\sqrt{a^2+b^2}\leqslant1$,所以 $\begin{cases}a^2+b^2\leqslant1,\\a\geqslant0,\\b\geqslant0.\end{cases}$ 即以 a,b 为坐标的点 $P(a,b)$ 所形成的平面区域是以点 $O(0,0)$ 为圆心,半径为 1 的圆及其内部在第一象限的部分,此区域的面积为 $\frac{\pi}{4}$.

以上是学生在课堂上的两种不同解法,两种解法似乎都很有"道理",但至少有一错,到底错在哪里?教学契机大好,这是一个很难得的教学资源,要深挖对与错的原因,努力做好纠错教学,悟出错因.

给足纠错时间,引导学生积极互动、广泛交流、不断思考,终悟明白:解法 2 实际上反映了运用"分离参数法"的一个"盲点",即上述分离的前提是不等式两边的变量是独立的.但深入分析后发现解法 2 中变量 θ 与 a,b 相关,并不独立,故不宜用"分离参数法",即不可得 $\sqrt{a^2+b^2}\leqslant(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos\theta})_{\min}$.

教师善于抓住纠错时机,通过示错—纠错—悟错的教学过程,启迪学生思维,让学生误中思,思中悟,误中求悟,让学生真正明白错误的原因,有效防止一错再错.

2　悟方法

学生解题再多,若不总结规律方法,仍不能举一反三,达不到教学效果."不思不悟、小思小悟、大思大悟"有思才能有所悟,以思生悟.教学中要力求学生多思考懂规律悟方法,才能以少胜多,高效解题教学.

例 2　已知函数 $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}(a>0$ 且 $a\neq1)$,讨论 $f(x)$ 的单调性.

解:$f(x)=\frac{(a^x+1)-2}{a^x+1}=1-\frac{2}{a^x+1}$,①当 $a>1$ 时,$\because a^x+1$ 为增函数,且 $a^x+1>0$,所以 $\frac{2}{a^x+1}$ 为减函数,从而 $f(x)=1-\frac{2}{a^x+1}=\frac{a^x-1}{a^x+1}$ 为增函数.②当 $0<a<1$ 时,类似地可得 $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}$ 为减函数.

教学切不可到此结束,否则,这样的教学就只能为解题而解题了.没有反思总结,怎能悟出数学本质与智慧呢?数学能力又从何而来?教师在教学中要启发交流,让学生领悟,本题的困难在于:若 $a>1$ 时,则 a^x 增,a^x-1 增,a^x+1 也增,因此无法判明 $\frac{a^x-1}{a^x+1}$ 的增减性,让学生进一步思考分析,使学生悟出造成这一困难的原因是变量分布的"范围"太广,因而变化因素不集中,所以对其变形为 $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}=1-\frac{2}{a^x+1}$,从而使变量集中于分母,容易判别其增减性.这种将变量集中的思想具有广泛的应用价值,大量的数学数学问题的解决都是通过这个方法的,这是通过本题要求学生真正要理解掌握悟出的数学本质和方法,是有效教学的关键,是提升学生能力的捷径.

3　悟本质

本质是删繁就简,探幽索隐后的抽象提炼,是比规律更深刻更内在的东西.发现本质是接近真理的最有效方式,发现本质是数学解题的最高境界.

一本教学参考书有以下一例并作了错因分析.

例 3　在钝角三角形 ABC 中,$a=1,b=2,c=t$,且 C 是最大角,求实数 t 的取值范围.

错解:$\because\triangle ABC$ 是钝角三角形且 C 是最大角,$\therefore C>90°$,$\therefore\cos C<0$.$\therefore\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$,$\therefore a^2+b^2-c^2<0$,即 $1+4-t^2<0$.$\therefore t^2>5$.又 $t>0$,$\therefore t>\sqrt5$,即 t 的取值范围是 $(\sqrt5,+\infty)$.

错因分析:错解忽略了两边之和大于第三边,即 $a+b>c$,也就是 $t<1+2=3$ 这个隐含条件,导致 t 的取值范围变大.所以,正确答案应为 $(\sqrt5,3)$.

思考:以上错因分析击中要害了吗?是接受还是深挖本质?

若按照以上错因分析的说法,即用了余弦定理后,还要再考虑三边能否构成三角形.难道三边满足了余弦定理,还未必能构成三角形?作以下探索.

命题　已知三个正实数 a,b,c,且 $a\leqslant b\leqslant c$,角 $C\in(0,\pi)$,若满足 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,则 $a+b>c$.

证明:$\because 0<C<\pi$,$\therefore -1<\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<1$,$\because a>0,b>0,c>0$,$\therefore\begin{cases}a^2+b^2-c^2<2ab,\\a^2+b^2-c^2>-2ab,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}(a-b)^2<c^2,\\(a+b)^2>c^2,\end{cases}\therefore a+b>c.$

所以不难有结论:若三边满足余弦定理,则这三边一定能构成一个三角形.故参考书中的错因分析未能击中要害,未揭示问题的本质,易引起误解.那么,以上错解究竟错在哪里呢?关键是未将问题作等价转化.现提供以下正解.

解：$\because$ $\triangle ABC$ 是钝角三角形且 C 是最大角，$\therefore$ $C>90°$，$\therefore$ $-1<\cos C<0$. $\therefore$ $-1<\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，$\therefore$ $-2ab<a^2+b^2-c^2<0$，即 $-2\cdot1\cdot2<1+4-t^2<0$. $\therefore$ $\begin{cases} t^2>5, \\ t^2<9, \\ t>0. \end{cases}$ $\therefore$ $\sqrt{5}<t<3$. 即 t 的取值范围是 $(\sqrt{5},3)$.

这小小的改动，它可击中要害，是对问题的本质理解. 数学解题一定要反思悟透，挖出问题的本质，这样才能达到真正理解真正掌握.

数学学习要解题，但不能陷入题海，不能让学生成为解题的机器. 对做过的题目要进行反思总结，并站在一定的高度加以审视，从中发掘题目的精髓，看清问题的本质，对数学有思有悟，这样，学生才能从更高的观点，用更宽的视野，更理性的眼光，去思考解决数学问题，让数学课堂不断出新出奇出彩，让数学解题教学真实高效.

参考文献

[1]兰诗全. 数学例题教学的“五忌五宜”. 中国数学教育，2012. 1－2.

数学解题关键环节教学设计研究

——以二道高考模拟题教学为例

淮北师范大学数学科学学院　(235000)　张　琳　张　昆

众所周知，数学解题最终表达结果为环环紧扣的逻辑过程，在诸多操作程序中存在决定问题本质的关键性的一环或几环，它或是某一程序，某种行动次序，某个正确衔接的操作方案，或者是某种程序. 在组成问题解答答案的环节中，对于学生探究具体问题解决思路的某些疑难环节，称之为数学解题的“关键环节”. 数学教师在解题教学设计及其课堂实施时，无需对于解题思路的每一个环节都平均使力，重在研究某些关键环节的教学活动，变向学生提供答案为启发或鼓励学生发生认识的心理过程.

一、教师应依据数学解题过程选择与确定“关键环节”

由上述的数学解题表达过程的“关键环节”概念内涵，能够认识到，数学教师在选择某道数学题进入课堂教学时，首先一定要通过自己独立探究解题思路，比对学生发生认识的心理活动过程及其个性差异，然后确定问题具体关键环节与普通环节. 如此，在进行教学准备工作时，就会突出关键环节，做好设计工作. 具体体现于：

数学解题的关键环节是决定题目能否获得准确解答的关键所在，也往往是学生在探究数学问题解答思路时，依据经验中的数学观念不能轻易获得的某种解答思路. 只有真正突破数学解题的关键环节这一瓶颈，学生才能把握解决该类题型或掌握该种解法的真正要旨，领悟数学解题的奥秘.

由此可见，数学教师不能将数学解题的过程直接“奉献”给学生，而要想办法启发学生生成数学解题的指令. 这样，解题的模式才能被纳入解题主体的头脑中，形成一种特定的操作问题信息的指令，成为一种解题模式，并比较容易地迁移到类似的探究数学解题思路活动中去.

二、数学解题关键环节处理示例

不少学生在探求数学解题关键环节处理途径时，由于对解答数学问题逻辑过程的分析和认识不全面，往往难以调用已有的数学观念，使之与相关的数学解题经验建立联系，从而经过多次尝试依然无法正确求解. 因此，教师在解题教学的课堂实施过程中，首先应帮助学生正确分析数学解题的关键环节，再利用启发式(形成问题串)教学指导学生探索解题思路，萌生数学解题关键环节的处理途径，突破解题关键环节的疑难点. 为了说明数学教师如何在实际解题及其教学中处理好探究解题思路的关键环节，先从 2021 年江苏省淮安市淮阴区数学高考模拟试题 5 的一道压轴题说起.

例 1　(2021 年江苏淮安淮阴区模拟题 19)已知函数 $f(x)=e^x|x^2-a|(a\geqslant0)$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调减区间；

(2)若方程 $f(x)=m$ 恰好有一个正根和一个负根，求实数 m 的最大值.

对于问题(1)，读者花点时间不难得到：$f(x)$ 的