运用换元法巧解一类复合函数零点问题

林慧敏 罗明霞
(湖北省团风中学,438800) (湖北省团风县实验小学,438800)

函数的零点是人教新课标教材新增内容之一. 而有一种形如 $y=f(f(x))+m,(m\in\mathbf{R})$ 这类函数的零点问题,它的右边是由一个复合函数构成,我们暂且把这类问题称为复合函数零点问题. 这类复合函数零点问题经常以选择题、填空题的形式出现在各地高考试题、模拟试题及调考试题中,也可以在解答题中与其它知识交汇后闪亮登场. 这类问题的求解可以把函数的解析式直接代入,但比较繁琐. 如果运用换元法过渡一下,实现问题的转化,则使问题既简单,又清楚明了. 即令 $t=f(x)$,则 $y=f(t)+m$,于是函数 $y=f(t)+m$ 的零点是 $t_i, i=1,2,3,\cdots$,再根据每个 t_i 的值来研究 $t=f(x)$ 对应零点 x 的值,即可得到函数 $y=f(f(x))+m(m\in\mathbf{R})$ 的零点. 下面举例说明,供参考.

例1 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\leqslant 0),\\ \log_2 x & (x>0),\end{cases}$$

则函数 $y=f(f(x))+1$ 的零点个数为( )

(A)4 (B)3 (C)2 (D)1

解 令 $t=f(x)$,则由 $f(t)+1=0$,得

$$f(t)=-1.$$

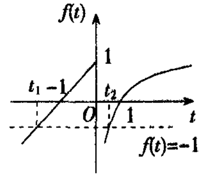

图1

研究函数 $f(x)$ 的图象,如图1,$f(t)=-1$ 有两个根 t_1, t_2,且 $t_1<0, 0<t_2<1$.

当 $t_1<0$ 时,再考察 $f(x)$ 的图象,如图2,$f(x)=t_1$ 有2个根 x_1, x_2;

类似地,当 $0<t_2<1$ 时,$t_2=f(x)$ 有2个根 x_3、x_4.

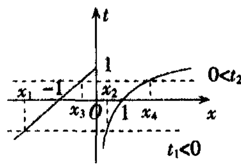

图2

所以,函数 $y=f(f(x))+1$ 的零点有4个,故选A.

评注 本题通过换元,把函数 $y=f(f(x))+1$ 的零点问题转化为方程 $f(t)+1$

$\cos\beta=\pm\dfrac{1}{2}$,$\therefore \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

综上所述,$\cos\alpha=1,\cos\beta=0$,或 $\cos\beta=\pm\dfrac{1}{2}$,$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

评注 解题过程中常用到等价变形,变形时要考虑到等价性,注意一些特殊的情况.

解三角函数的题目,首先要注意隐含的条件,特别是范围问题. 往往范围隐藏得很深,需要深层次地挖掘. 如果出现多解情况,一定要找到隐含的条件,对结果进行验证.

$=0$、$t=f(x)$ 的解的问题. 其中,方程 $f(t)+1=0$ 的解的范围 $t_1<0, 0<t_2<1$ 分别是函数 $f(x)$ 的两个函数值的范围,其对应的自变量的值就是函数 $y=f(f(x))+1$ 的零点. 通过换元,结合函数的图象,得到函数的零点,变换坐标轴的横轴名称,重复使用,是解决这类问题的一般方法.

例2　已知 $f(x)=x^3-3x$,设 $h(x)=f(f(x))-c$,其中 $c\in[-2,2]$,则函数 $y=h(x)$ 的零点个数为______个.

解　令 $h(x)=0$,得 $f(f(x))=c$,再令 $f(x)=t$,得 $f(t)=c$.

由 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ 知,$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上递增,$(-1,1)$ 上递减,$(1,+\infty)$ 上递增,其图象如图3所示.

由图3,当 $c=2$ 时,$f(t)=c$ 有2个根 $t_1=-1, t_2=2$,

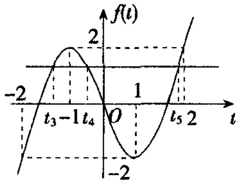

图 3

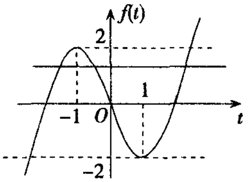

图 4

由图4知,$f(x)=t_1$ 有三个根,$f(x)=t_2$ 有2个根,故共有5个根.

同理,当 $c=-2$ 时,$h(x)=0$ 也有5个根.

当 $0<c<2$ 时,由图3知,$f(t)=c$ 有3个根 t_3,t_4,t_5,且 $t_3\in(-2,-1)$,$t_4\in(-1,0)$,$t_5\in(1,2)$.

由图4知,$f(x)=t_3$ 有3个根,$f(x)=t_4$ 有3个根,$f(x)=t_5$ 有3个根,故此时共有9个根.

同理,$-2<c\leqslant 0$ 时,$h(x)=0$ 也有9个根.

综上所述,函数 $y=h(x)$ 的零点个数为5个或9个.

评注　由函数零点的概念可知,函数 $y=f(x)$ 的零点 $\Leftrightarrow$ 方程 $f(x)=0$ 的根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标. 所以,函数零点问题的求解常常用到"数形结合"的数学思想方法. 通过换元法,作出函数的图象对应分析,实现过渡转化,很轻松自然地解决这类复合函数的零点个数问题.

例3　奇函数 $f(x)$、偶函数 $g(x)$ 的图象分别如图5、图6所示,方程 $f(g(x))=0$, $g(f(x))=0$ 的实根个数分别为 a、b,则 $a+b$ 等于(　　)

(A)14　(B)10　(C)7　(D)3

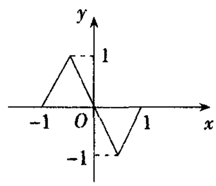

图 5

解　(1) 对于方程 $f(g(x))=0$,令 $t=g(x)$,则 $f(t)=0$.

由 $f(t)=0$ 结合图5得 $t=-1,0,1$;再由 $t=-1$,即 $g(x)=-1$,结合图6得 $x=\pm 1$,有2个根.

同理,$g(x)=0$ 时,有3个根,$g(x)=1$ 时,$x=\pm 2$,有2个根.

$\therefore f(g(x))=0$ 的实根数为 $a=7$.

(2) 对于方程 $g(f(x))=0$,令 $t=f(x)$,则由 $g(t)=0$ 结合图6得:$t_1\in(-2,-1)$,$t_2=0$, $t_3\in(1,2)$;再由 $t_1\in(-2,-1)$,即 $f(x)\in(-2,-1)$ 结合图5知,此时无解. 同理,$t_2=0$,即 $f(x)=0$ 时,有3个根;$f(x)=t_3$ 无解.

$\therefore g(f(x))=0$ 的实根数为 $b=3$.

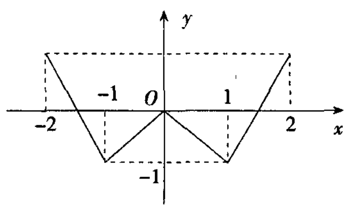

图 6

综上,$a+b=10$,故选 B.

评注　对于(2),当 $t_1\in(-2,-1)$, $t_3\in(1,2)$ 时,函数 $f(x)$ 的图象与 $y=t_1$, $y=t_3$ 没有

交点，因此方程 $t_1=f(x)$，$t_3=f(x)$ 无解.

例 4 设定义域为 **R** 的函数

$$f(x)=\begin{cases}5^{|x-1|}-1 & (x\geqslant 0),\\ x^2+4x+4 & (x<0),\end{cases}$$

若关于 x 的方程

$$f^2(x)-(2m+1)f(x)+m^2=0$$

有 5 个不同的实根，则 $m=$ (　　)

(A)2　(B)4 或 6　(C)2 或 6　(D)6

解 因为 $f^2(x)-(2m+1)f(x)+m^2=0$，令 $t=f(x)$，则 $t^2-(2m+1)t+m^2=0$.

作出函数 $f(x)$ 的图象如图 7，可知关于 t 的方程 $t^2-(2m+1)t+m^2=0$ 必有一根为 $t_1=4$，另一根 $t_2=0$ 或 $t_2>4$，才符合题意.

当 $t_1=4$ 时，解得 $m=2$ 或 6.

经检验，当 $m=2$ 时，方程 $t^2-(2m+1)t+m^2=0$ 的解为 $t=4$ 或 $t=1$，不符合题意，舍去.

当 $m=6$ 时，方程 $t^2-(2m+1)t+m^2=0$ 的解为 $t=4$ 或 $t=9$，符合题意.

综上，$m=6$，故选 D.

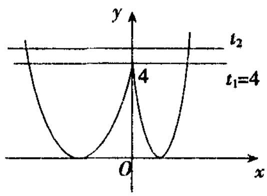

图 7

评注 本题充分地考查了复合函数的零点问题. 通过换元法，再作出函数图象，问题迎刃而解.

例 5 (2006 年湖北高考题) 关于 x 的方程 $(x^2-1)^2-|x^2-1|+k=0$，给出下列 4 个命题：

① 存在实数 k，使得方程恰有 2 个不同的实根；

② 存在实数 k，使得方程恰有 4 个不同的实根；

③ 存在实数 k，使得方程恰有 5 个不同的实根；

④ 存在实数 k，使得方程恰有 8 个不同的实根.

其中真命题的序号是______.

解 根据题意，可令

$$|x^2-1|=t(t\geqslant 0), \qquad ①$$

则方程化为

$$t^2-t+k=0. \qquad ②$$

作出函数 $y=|x^2-1|$ 的图象(如图 8)，结合函数的图象可知：

(1) 当 $t=0$ 或 $t>1$ 时，方程 ① 有 2 个不等的根；

(2) 当 $0<t<1$ 时，方程 ① 有 4 个根；

(3) 当 $t=1$ 时，方程 ① 有 3 个根.

故当 $t=0$ 时，代入方程②，解得 $k=0$，此时方程② 有 2 个不等实根 $t=0$ 或 $t=1$，故此时原方程有 5 个根；

当方程② 有 2 个不等正根，即 $0<k<\frac{1}{4}$ 时，方程 ② 有两根且均小于 1 大于 0，故相应地满足方程 $|x^2-1|=t$ 的解有 8 个，即原方程的解有 8 个；

当 $k=\frac{1}{4}$ 时，方程 ② 有 2 个相等的正根 $t=\frac{1}{2}$，相应地原方程的解有 4 个.

综上，真命题的序号为：① ② ③ ④.

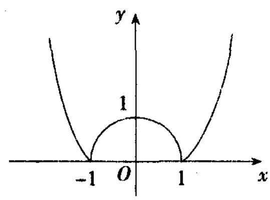

图 8

评注 这道高考题为当年选择题的最后一题，难度较大. 但若考生能够透过问题现象，认清问题的实质，运用换元法解决这类复合函数的零点问题，便可轻松获解.

总之，运用换元法解决形如 $y=f(f(x))+m$ 这类复合函数的零点问题，体现了数学中的化归与转化、数形结合、分类讨论等数学思想，不失为一种操作简单、行之有效的解题思路和方法，值得借签.