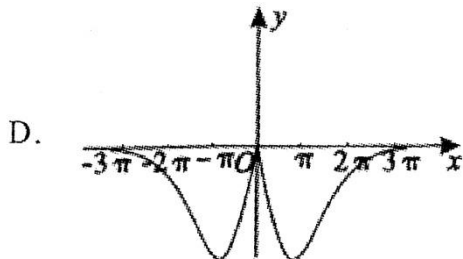
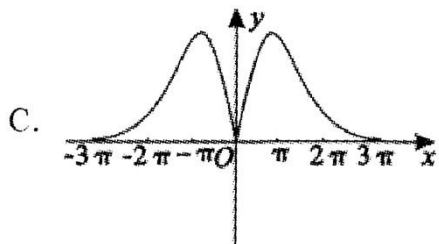
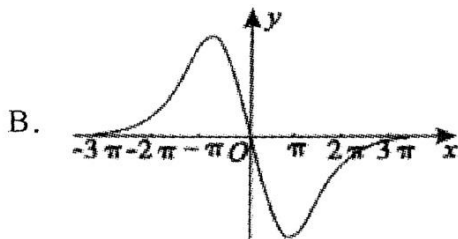
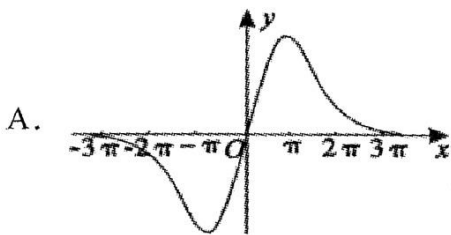


一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1. 若集合 $M = \{x | x > 1\}$, $N = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x \leq 4\}$, 则 $(C_R M) \cap N = (\quad)$
 A. $\{0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{2, 3, 4\}$
2. 在复平面内, 复数 $6-5i$, $-2+3i$ 对应的点分别为 A 、 B , 若 C 为线段 AB 的中点, 则点 C 对应的复数是 $(\quad)$
 A. $4+8i$ B. $8+2i$ C. $2-i$ D. $4+i$
3. 设 $x \in \mathbb{R}$, 则“ $x^3 > 8$ ”是“ $|x| > 2$ ”的 $(\quad)$
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知函数 $f(x) = e^{-x} - e^x$ (e 为自然对数的底数), 若 $a = 0.7^{-0.5}$, $b = \log_{0.5} 0.7$, $c = \log_{0.7} 5$, 则 $(\quad)$
 A. $f(b) < f(a) < f(c)$ B. $f(a) < f(b) < f(c)$
 C. $f(c) < f(a) < f(b)$ D. $f(c) < f(b) < f(a)$
5. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{DE} = \mathbf{0}$, 若 $\overrightarrow{EB} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $(\quad)$
 A. $y = 2x$ B. $y = -2x$ C. $x = 2y$ D. $x = -2y$
6. 设 $x \in (0, \pi)$, 则函数 $f(x) = |\sqrt{1+\cos x} - \sqrt{1-\cos x}|$ 的取值范围是 $(\quad)$
 A. $[0, \sqrt{2}]$ B. $[0, \frac{1}{2}]$ C. $[0, \sqrt{2}]$ D. $[0, \frac{1}{2}]$
7. 函数 $f(x) = \frac{x^3 + \sin x}{e^x + e^{-x}}$ 的图象大致是 $(\quad)$



8. 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 点 E 、 F 分别在边 AB 、 BC 上, 且 $AE = 1$, $BF = \frac{1}{2}$, 将此正方形沿 DE 、 DF 折起, 使点 A 、 C 重合于点 P , 则三棱锥 $P-DEF$ 的体积是 $(\quad)$

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分。

9. 已知向量 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{b} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则下列结论正确的有 ()

A. $|\vec{b}| = 1$

B. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\tan \alpha = \sqrt{3}$

C. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最大值为 2

D. $|\vec{a} - \vec{b}|$ 的最大值为 3

10. 关于函数 $f(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($x \in \mathbb{R}$) 有下列命题, 其中正确的是 ()

A. $y = f(x)$ 是以 2π 为最小正周期的周期函数

B. $y = f(x)$ 的表达式可改写为 $f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

C. $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称

D. $y = f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称

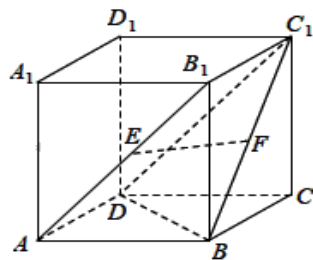
11. 如图所示, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 若 $AB = BC$, E, F 分别是 AB_1 , BC_1 的中点, 则下列结论中成立的是 ()

A. EF 与 BB_1 垂直

B. $EF \perp$ 平面 BDD_1B_1

C. EF 与 C_1D 所成的角为 45°

D. $EF \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$



12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & x \geq 0 \\ -x^2 + 2x + 1, & x < 0 \end{cases}$, 则下列判断正确的是 ()

A. $f(x)$ 为奇函数

B. 对任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 则有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \leq 0$

C. 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 则有 $f(x) + f(-x) = 2$

D. 若函数 $y = |f(x)| - mx$ 有两个不同的零点, 则实数 m 的取值范围 $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $a = \log_4 9$, $b = \log_2 5$, 则 $2^{2a+b} =$ _____.

14. 若一个圆柱的轴截面是面积为 4 的正方形, 则该圆柱的外接球的表面积为_____.

15. 已知 $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{13}{14}$, 且 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $\tan 2\alpha =$ ____, 角 $\beta =$ _____.

16. 函数 $y = f(x)$ 图象上不同两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 处的切线的斜率分别是 k_A, k_B , 规定 $\varphi(A, B) = \frac{|k_A - k_B|}{|AB|^2}$

做曲线 $y = f(x)$ 在点 A、B 之间的“平方弯曲度”. 设曲线 $y = e^x + x$ 上不同两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 且 x_1

$-x_2=1$, 则 $\varphi(A,B)$ 的取值范围是_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。请在答题卡指定区域内作答。

17. (本小题满分 10 分) 已知 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (1, -1)$.

(1) 若 θ 为 $2\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夹角，求 θ 的值；

(2) 若 $2\vec{a} + \vec{b}$ 与 $k\vec{a} - \vec{b}$ 垂直，求 k 的值.

18. (12 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中， a 、 b 、 c 分别为角 A 、 B 、 C 的对边，且 $b = \frac{a \sin A - c \sin C}{\sin B - \sin C}$.

(1) 求角 A 的值；

(2) 若 $a = \sqrt{3}$ ，设角 $B = \theta$ ， $\triangle ABC$ 周长为 y ，求 $y = f(\theta)$ 的最大值.

19. (本小题满分 12 分) 设函数 $f(x) = a \cdot 2^x - 2^{-x} (a \in \mathbb{R})$

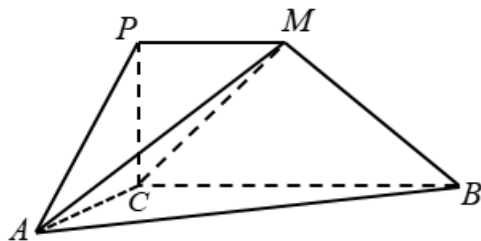
(1) 若函数 $y = f(x)$ 的图象关于原点对称，求函数 $g(x) = f(x) + \frac{3}{2}$ 的零点 x_0 ；

(2) 若函数 $h(x) = f(x) + 4^x + 2^{-x}$ 在 $x \in [0, 1]$ 的最大值为 -2 ，求实数 a 的值.

20. (第一问 2 分，第二问 6 分，第三问 4 分，满分 12 分) 如图，四边形 $PCBM$ 是直角梯形， $\angle PCB = 90^\circ$ ， $PM \parallel BC$ ， $PM = 1$ ， $BC = 2$ 。又 $AC = 1$ ， $\angle ACB = 120^\circ$ ， $AB \perp PC$ ，直线 AM 与直线 PC 所成的角为 60° 。

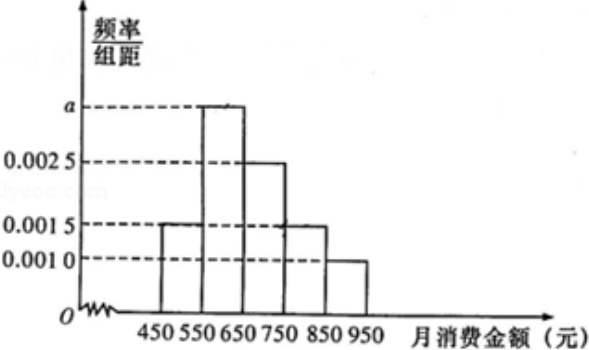
(1) 求证： $PC \perp AC$ ；(2) 求二面角 $M - AC - B$ 的余弦值；

(3) 求点 B 到平面 MAC 的距离。



21. (本小题满分 12 分)某学校共有 1000 名学生，其中男生 400 人，为了解该校学生在学校的月消费情况，采取分层抽样随机抽取了 100 名学生进行调查，月消费金额分布在 450~950 之间. 根据调查的结果绘制的学生在校月消费金额的频率分布直方图如图所示：

	属于“高消费群”	不属于“高消费群”	合计
男			
女			
合计			



将月消费金额不低于 750 元的学生称为“高消费群”.

(1) 求 a 的值，并估计该校学生月消费金额的平均数（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

(2) 现采用分层抽样的方式从月消费金额落在 $[550, 650)$ ， $[750, 850)$ 内的两组学生中抽取 10 人，再从这 10 人中随机抽取 3 人，记被抽取的 3 名学生中属于“高消费群”的学生人数为随机变量 X ，求 X 的分布列及数学期望；

(3) 若样本中属于“高消费群”的女生有 10 人，完成下列 2×2 列联表，并判断是否有 97.5% 的把握认为该校学生属于“高消费群”与“性别”有关？

(参考公式： $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$)

$P(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

22. (本小题满分 12 分)已知函数 $f(x) = e^x - ax$.

(1) 当 $a > 0$ 时，设函数 $f(x)$ 的最小值为 $g(a)$ ，证明： $g(a) \leq 1$ ；

(2) 若函数 $h(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ，证明： $h(x_1) + h(x_2) > 2$.

江苏省仪征中学 2021 届期中模拟考试二

数学参考答案

1. B 2. C 3. A 4. B 5. D 6. A 7. A 8. B
9. AC 10. BD 11. ABD 12. CD

13. 45 14. 8π 15. $-\frac{8\sqrt{3}}{47}$ $\frac{\pi}{3}$ 16. $(0, \frac{\sqrt{2}-1}{2}]$

17. 解: (1) $\because \vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (1, -1), \therefore 2\vec{a} + \vec{b} = (3, 3), \vec{a} - \vec{b} = (0, 3),$

$$\therefore \cos \theta = \frac{(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})}{|2\vec{a} + \vec{b}| |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{9}{3\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore \theta \in [0, \pi] \therefore \theta = \frac{\pi}{4} \dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) $\because \vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (1, -1) \therefore k\vec{a} - \vec{b} = (k-1, 2k+1), 2\vec{a} + \vec{b} = (3, 3)$
 $\because 2\vec{a} + \vec{b}$ 与 $k\vec{a} - \vec{b}$ 垂直 $\therefore (3, 3) \cdot (k-1, 2k+1) = 0, \therefore 3k-3+6k+3=0,$
 解得: $k=0 \dots\dots 10 \text{ 分}$

18. 解: (1) 由已知 $b = \frac{a \sin A - c \sin C}{\sin B - \sin C}$ 可得 $b \sin B - b \sin C = a \sin A - c \sin C,$

结合正弦定理可得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc, \therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2},$ 又 $A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{1}{3}\pi.$

(2) 由 $a = \sqrt{3}, A = \frac{1}{3}\pi.$ 及正弦定理得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2,$

$$\therefore b = 2 \sin \theta, c = 2 \sin C = 2 \sin(\frac{2\pi}{3} - \theta),$$

$$\text{故 } y = a + b + c = \sqrt{3} + 2 \sin \theta + 2 \sin(\frac{2\pi}{3} - \theta), = \sqrt{3} + 3 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$$

$$= 2\sqrt{3} \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) + \sqrt{3} \quad \text{由 } 0 < \theta < \frac{2\pi}{3}, \text{ 得 } \frac{\pi}{6} < \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6},$$

$$\therefore \text{当 } \theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } \theta = \frac{1}{3}\pi \text{ 时, } y_{\max} = 3\sqrt{3}.$$

19 解: $\because f(x)$ 的图象关于原点对称, $\therefore f(-x) + f(x) = 0,$

$$a \cdot 2^{-x} - 2^{-x} + a \cdot 2^x - 2^x = 0, \text{ 即 } (a-1)(2^{-x} + 2^x) = 0, a=1 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(注: 若用赋值法求解, 没有检验, 扣 1 分)

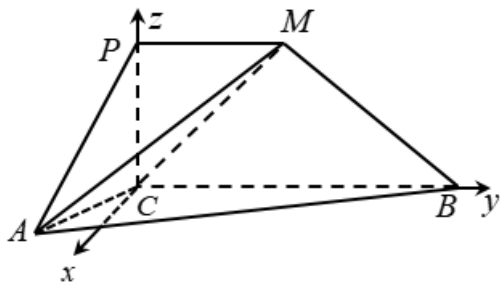
$$\text{令 } g(x) = 2^x - 2^{-x} + \frac{3}{2} = 0, \text{ 则 } 2 \cdot (2^x)^2 + 3 \cdot (2^x) - 2 = 0,$$

$$\therefore (2^x + 2) \cdot (2 \cdot 2^x - 1) = 0, \text{ 又 } 2^x > 0, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore x = -1 \text{ 所以函数 } g(x) \text{ 的零点为 } x_0 = -1. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) $h(x) = a \cdot 2^x - 2^{-x} + 4^x + 2^{-x}, x \in [0, 1],$ 令 $2^x = t \in [1, 2],$

$$h(x) = H(t) = t^2 + at, t \in [1, 2], \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$



设 $P(0, 0, z)$, 则

$$\overrightarrow{CP} = (0, 0, z), \quad \overrightarrow{AM} = (0, 1, z) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, z\right).$$

$$\because \cos 60^\circ = |\cos \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CP} \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{CP}|} \right| = \frac{z^2}{\sqrt{3+z^2} \cdot |z|},$$

$$\text{且 } z > 0, \therefore \frac{z}{\sqrt{z^2+3}} = \frac{1}{2}, \text{ 得 } z=1, \therefore \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 1\right).$$

设平面 MAC 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, 1)$, 则由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases}$

$$\text{得} \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y + 1 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \text{ 得} \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = -1 \end{cases} \therefore \vec{n} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -1, 1\right) \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{平面 } ABC \text{ 的一个法向量为 } \overrightarrow{CP} = (0, 0, 1). \quad \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{CP} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{CP}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{CP}|} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

显然, 二面角 $M-AC-B$ 为锐二面角, $\therefore$ 二面角 $M-AC-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$(3) \text{ 点 } B \text{ 到平面 } MAC \text{ 的距离 } d = \left| \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{2\sqrt{21}}{7}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (1) 由题意知 $100 \times (0.0015 + a + 0.0025 + 0.0015 + 0.001) = 1$, 解得 $a = 0.0035$,

样本平均数为 $\bar{x} = 500 \times 0.15 + 600 \times 0.35 + 700 \times 0.25 + 800 \times 0.15 + 900 \times 0.10 = 670$ 元.

(2) 由题意, 从 $[550, 650]$ 中抽取 7 人, 从 $[750, 850]$ 中抽取 3 人,

随机变量 X 的所有可能取值有 0, 1, 2, 3.

$$P(X=k) = \frac{C_3^k C_7^{3-k}}{C_{10}^3} (k=0, 1, 2, 3) \text{ 所以随机变量 } X \text{ 的分布列为:}$$

P	0	1	2	3
X	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$

$$\text{随机变量 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = \frac{63}{120} + 2 \times \frac{21}{120} + 3 \times \frac{1}{120} = \frac{9}{10}.$$

(3) 由题可知, 样本中男生 40 人, 女生 60 人属于“高消费群”的 25 人, 其中女生 10 人; 得出以下 2×2 列联表:

	属于“高消费群”	不属于“高消费群”	合计
男生	15	25	40
女生	10	50	60
合计	25	75	100

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{100(10 \times 25 - 15 \times 50)^2}{25 \times 75 \times 40 \times 60} = \frac{50}{9} \approx 5.024,$$

所以有 97.5% 的把握认为概型学生属于“高消费群”与性别有关.

22. 证明: (1) $f'(x) = e^x - a (a > 0)$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \ln a$, 当 $x > \ln a$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $x < \ln a$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)_{\min} = f(\ln a) = a - a \ln a$, $\therefore g(a) = a - a \ln a (a > 0)$,

令 $g(x) = x - x \ln x (x > 0)$, $g'(x) = -\ln x$, 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = 1$,

$\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $\therefore g(x)_{\max} = g(1) = 1$,

$\therefore g(x) \leq 1$, $\therefore$ 当 $a > 0$ 时, $g(a) \leq 1$;

(2) $h(x) = e^x - ax - \frac{1}{2}x^2$, $h'(x) = e^x - a - x$, 令 $\varphi(x) = e^x - a - x$, $\varphi'(x) = e^x - 1$,

令 $\varphi'(x) = 0$, 解得 $x = 0$, 当 $x > 0$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $\varphi'(x) < 0$,

$\therefore \varphi(x)_{\min} = \varphi(0) = 1 - a$, 又函数 $h(x)$ 有两个极值点, $\therefore 1 - a < 0$,

$\therefore a > 1$, 且 $x_1 < 0 < x_2$, 当 $x \in (-\infty, x_1)$ 时, $h(x)$ 单调递增,

当 $x \in (x_1, 0)$ 时, $h(x)$ 单调递减, $\therefore$ 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $h(x) \leq h(x_1)$

又 $-x_2 \in (-\infty, 0)$, $\therefore h(-x_2) \leq h(x_1)$, $\therefore h(x_1) + h(x_2) \geq h(-x_2) + h(x_2) = e^{x_2} + e^{-x_2} - x_2^2$,

令 $m(x) = e^x + e^{-x} - x^2 (x \geq 0)$, $m'(x) = e^x - \frac{1}{e^x} - 2x$

令 $n(x) = m'(x)$, $n'(x) = e^x + \frac{1}{e^x} - 2 \geq 0$, $\therefore n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore m'(x) = n(x) \geq n(0) = 0$, $\therefore m(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore m(x) \geq m(0) = 2$,

$\therefore x_2 > 0$, $\therefore m(x_2) = e^{x_2} + e^{-x_2} - x_2^2 > 2$ 即 $h(-x_2) + h(x_2) > 2$, $\therefore h(x_1) + h(x_2) > 2$.