2.2.2 函数的单调性

导数之所以重要，是因为利用导数能够很简洁地刻画函数的单调性等性质.

【典型例题】

一、求具体函数的单调区间

1. (2019 全国 II 卷理 20) 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

$x\neq 1$

$f'(x)=\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}>0$

$y=\ln x+f(x)$

$f(x)$在$(0,1)$和$(1,+\infty)\uparrow$

2. (2016 全国 II 理 21) 已知函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}e^x$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

$x\neq -2$

$f'(x)=e^x\left[\dfrac{x-2}{x+2}+\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)'\right]$

$y=f(x)\cdot e^x$

$=e^x\dfrac{x^2}{(x+2)^2}\geq 0$

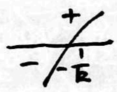
$f(x)$在$(-\infty,-2)$和$(-2,+\infty)\uparrow$

二、函数单调性的讨论

3. (2009 北京理 18) 已知函数 $f(x)=xe^{kx}(k\neq 0)$，求函数 $f(x)$ 的单调区间.

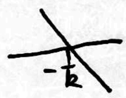
$f'(x)=(kx+1)e^{kx}$ $e^{kx}>0$

1° $k>0$时 $x\in(-\infty,-\frac{1}{k})$, $f'(x)<0$, $f(x)\downarrow$



$x\in(-\frac{1}{k},+\infty)$, $f'(x)>0$, $f(x)\uparrow$

2° $k<0$时 $x\in(-\infty,-\frac{1}{k})$, $f'(x)>0$, $f(x)\uparrow$



$x\in(-\frac{1}{k},+\infty)$, $f'(x)<0$, $f(x)\downarrow$

4. (2016 山东文 20) 已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2+(2a-1)x, a\in\mathbb{R}$，令 $g(x)=f'(x)$，求函数 $g(x)$ 的单调区间.

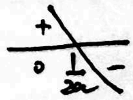
$x>0$

$g(x)=\ln x-2ax+2a$

$g'(x)=\dfrac{1-2ax}{x}$

1° $a\leq 0$时 $x>0$, $1-2ax>0$ $g'(x)>0$, $g(x)$在$(0,+\infty)\uparrow$

2° $a>0$时 $x\in(0,\frac{1}{2a})$, $g'(x)>0$, $g(x)\uparrow$



$x\in(\frac{1}{2a},+\infty)$, $g'(x)<0$, $g(x)\downarrow$

5. (2017 全国 I 卷文 21) 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x}-a)-a^{2}x$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

解: $f'(x)=(2e^{x}+a)(e^{x}-a)$ $\boxed{\text{分析临界条件是 } a=0}$

1° $a=0$时 $f'(x)=2(e^{x})^{2}>0$, $f(x)$在R↑

2° $a>0$时, $2e^{x}+a>0$, $f'(x)=0$ 得 $x=\ln a$,

$x\in(-\infty,\ln a)$, $f'(x)<0$, $f(x)$↓

$x\in(\ln a,+\infty)$, $f'(x)>0$, $f(x)$↑

3° $a<0$时, $e^{x}-a>0$, $f'(x)=0$ 得 $x=\ln(-\frac{a}{2})$

$x\in(-\infty,\ln(-\frac{a}{2}))$ $f'(x)<0$, $f(x)$↓

$x\in(\ln(-\frac{a}{2}),+\infty)$, $f'(x)>0$, $f(x)$↑

三、函数单调性的应用

6. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f(-1)=2$, 对任意 $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)>2$, 则 $f(x)>2x+4$ 的解集为 (B)

A. $(-1,1)$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-\infty,-\infty)$

$f(x)-2x>4$

令 $h(x)=f(x)-2x$

$\forall x\in R$ $h'(x)=f'(x)-2>0$, $h(x)$↑

$h(-1)=f(-1)+2=4$.

又 $h(x)>h(-1)$

$\therefore$ $x>-1$

7. $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的非负可导函数, 且满足 $xf'(x)-f(x)\leqslant 0$,

对任意正数 a,b, 若 $a<b$, 则必有 (A)

A. $af(b)<bf(a)$　　B. $bf(a)<af(b)$　　C. $af(a)<bf(b)$　　D. $bf(b)<af(a)$

$\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^{2}}\leq 0$

令 $h(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在$(0,+\infty)$↓

又 $0<a<b$ $\therefore h(a)>h(b)$ 即 $\frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$

8. 设 a,b 是正实数, $\mathrm{e}<a<b$, 其中 e 是自然对数的底数,

求证 : $a^{b}>b^{a}$.

只需证 $\ln a^{b}>\ln b^{a}$

$b\ln a>a\ln b$

又 $e<a<b$

只需证 $\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$.

令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$ $(x>e)$

$h'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^{2}}$

$=\frac{1-\ln x}{x^{2}}<0$

$h(x)$↓

又 $e<a<b$

$\therefore$ $h(a)>h(b)$ 即 $\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$

【巩固练习】

1. 若函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$的单调递减区间为$(-1,3)$，则$b+c=$ $\underline{\ -12\ }$.

$-1,3$ 是 $f'(x)=0$ 的两根

2. 解关于 x 的不等式：

① $3x^2+ax+1>0$

分析临界条件

$\Delta=a^2-12=0$，$a=\pm2\sqrt{3}$

1° $a<-2\sqrt{3}$

$x<\dfrac{-a-\sqrt{a^2-12}}{6}$ 或 $x>\dfrac{-a+\sqrt{a^2-12}}{6}$

2° $a=-2\sqrt{3}$　　$x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3° $-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$　　$\Delta<0$　　$x\in R$

4° $a=2\sqrt{3}$　　$x\neq-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5 $a>2\sqrt{3}$

$x<\dfrac{-a-\sqrt{a^2-12}}{6}$ 或 $x>\dfrac{-a+\sqrt{a^2-12}}{6}$.

② $ax^2+3x+1>0$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{分析临界条件}\\ \Delta=0\quad,\quad a=0\end{array}}$

① ② ③ ④ ⑤

0　$\frac{9}{4}$　a

1° $a<0$，$\Delta>0$

$\dfrac{-3+\sqrt{9-4a}}{2a}<x<\dfrac{-3-\sqrt{9-4a}}{2a}$

2° $a=0$　，$x>-\dfrac{1}{3}$

3° $0<a<\dfrac{9}{4}$. $\Delta>0$

$x<\dfrac{-3-\sqrt{9-4a}}{2a}$ 或 $x>\dfrac{-3+\sqrt{9-4a}}{2a}$.

4. $a=\dfrac{9}{4}$　　$x\neq-\dfrac{2}{3}$

5 $a>\dfrac{9}{4}$时　$\Delta<0$　　$x\in R$.

D等式，$x\in[1,2]$ 呢？

3. (2017 课标 II 文 21)　已知函数 $f(x)=(1-x^2)\,e^x$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

$f'(x)=e^x(1-x^2-2x)$

$\quad=e^x(-x^2-2x+1)$

$x\in(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$　　$f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$

$x\in(-\infty,-1-\sqrt{2})$ 或 $x\in(-1+\sqrt{2},+\infty)$　$f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$.

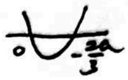
4. (2015 江苏 19) 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+b, a, b\in\mathbb{R}$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

$$f'(x)=3x^2+2ax$$
$$=x(3x+2a)$$
$$=3x\left(x+\frac{2a}{3}\right)$$

$\boxed{-\frac{2a}{3}\text{与}0\text{的大小不确定，临界条件是}a=0}$

1° $a<0$时

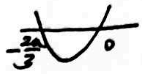
$x\in(-\infty,0)$和$x\in(-\frac{2a}{3},+\infty)$, $f'(x)>0$, $f(x)\uparrow$



$x\in(0,-\frac{2a}{3})$ $f'(x)<0$, $f(x)\downarrow$

2° $a=0$时 $f'(x)=3x^2\geq 0$, $f(x)$在$\mathbb{R}\uparrow$

3° $a>0$时 $x\in(-\infty,-\frac{2a}{3})$和$(0,+\infty)$, $f'(x)>0$, $f(x)\uparrow$



$x\in(-\frac{2a}{3},0)$ $f'(x)<0$, $f(x)\downarrow$

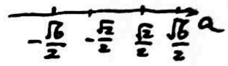
5. (2009 江苏 20) 已知函数 $f(x)=3x^2-2ax+a^2, x\in(a,+\infty)$, 求 $f(x)\geqslant 1$ 的解集.

$g(x)=f(x)-1=3x^2-2ax+a^2-1\geq 0$ $x\in(a,+\infty)$

对称轴 $x=\frac{a}{3}$

分析临界条件: $g(a)=0$ $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Delta=0$

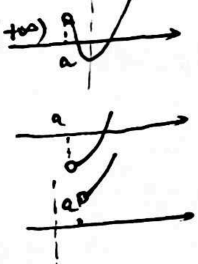


1° 当$a\leq-\frac{\sqrt{6}}{2}$或$a\geq\frac{\sqrt{6}}{2}$时 $\Delta\leq 0$ $g(x)\geq 0$解为$\mathbb{R}$ 又$x\in(a,+\infty)$ $\therefore x\in(a,+\infty)$

2° 当$-\frac{\sqrt{6}}{2}<a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$时 $\Delta>0$, $g(a)>0$ $x\in\left(a,\frac{a-\sqrt{3-2a^2}}{3}\right]\cup\left[\frac{a+\sqrt{3-2a^2}}{3},+\infty\right)$

3° 当$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq a\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$时 $\Delta>0$, $g(a)<0$ $x\in\left[\frac{a+\sqrt{3-2a^2}}{3},+\infty\right)$

4° 当$\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{6}}{2}$时 $\Delta>0$, $g(a)>0$, $x\in(a,+\infty)$



6. (2018 全国 I 卷理 21) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

☆ 解: $x>0$

$$f'(x)=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}$$

分析临界点 $g(0)=-1<0$

$\Delta=a^2-4=0$

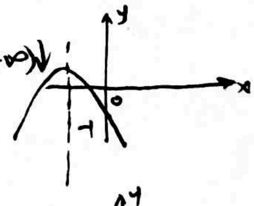
$a=\pm 2$

对称轴 $x=+\frac{a}{2}$

令 $g(x)=-x^2+ax-1$ $(x>0)$

1° 当$-2\leq a\leq 2$时 $\Delta\leq 0$, $g(x)\leq 0$ $f'(x)\leq 0$ $\therefore f(x)$在$(0,+\infty)\downarrow$

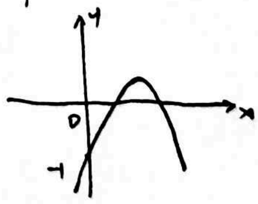
2° 当$a<-2$时 $g(x)<0$, $f'(x)<0$, $f(x)$在$(0,+\infty)\downarrow$



3° 当$a>2$时

$x\in\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$和$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$

$g(x)<0$, $f'(x)<0$, $f(x)\downarrow$



$x\in\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$

$g(x)>0$, $f'(x)>0$, $f(x)\uparrow$.