立体几何

知识点

1、平行、垂直判定

2、平行、垂直性质

小题热身

一、选择题

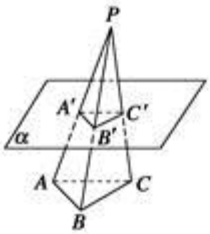
1. 若 AB、BC、CD 是不在同一平面内的三条线段，则经过它们中点的平面和直线 AC 的位置关系是(   )

A. 平行　　B. 相交　　C. AC 在此平面内　　D. 平行或相交

2. 有以下四个说法，其中正确的是(   ) ①若直线与平面没有公共点，则直线与平面平行;②若直线与平面内的任意一条直线不相交，则直线与平面平行;③若直线与平面内的无数条直线不相交，则直线与平面平行;④若平面外的直线与平面内的一条直线平行，则直线与平面平行.

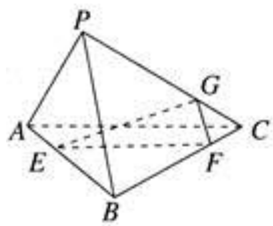
A. ①②　　B. ①②③　　C. ①③④　　D. ①②④

3. 如图所示，P 是三角形 ABC 所在平面外一点，平面$\alpha//$平面 ABC，α分别交线段 PA，PB，PC 于A'，B'，C'，若$PA':AA'=2:3$，则$S_{\triangle A'B'C'}:S_{\triangle ABC}=(\quad)$



A. $2:25$　B. $4:25$　C. $2:5$　D. $4:5$

4. 如图，P 是$\triangle ABC$所在平面外一点，E，F，G 分别在 AB，BC，PC 上，且$PG=2GC$，$AC//$平面 EFG，$PB//$平面 EFG，则$\frac{AE}{EB}=(\quad)$A. $\frac{1}{2}$　B. 1　C. $\frac{3}{2}$　D.



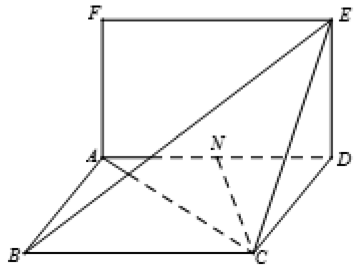
5. 已知直线$l\perp$平面α，直线$m\subset$平面β，有下列四个命题：

①若$\alpha//\beta$，则$l\perp m$;②若$\alpha\perp\beta$，则$l//m$;③若$l//m$，则$\alpha\perp\beta$;④若$l\perp m$，则$\alpha\perp\beta$，其中，正确命题的序号是(   )

A. ①②　　B. ③④　　C. ①③　　D. ②④

例题讲解

例 1 如图，矩形 $ADEF$ 和菱形 $ABCD$ 所在平面互相垂直，已知$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，点 N 是线段 AD 的中点．



(1)求证：$CN\perp AF$；

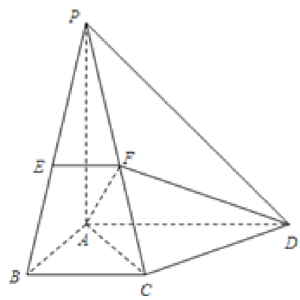
(2)试问在线段 BE 上是否存在点 M，使得直线$AF//$平面 MNC？若存在，请证明$AF//$平面 MNC，并求出$\frac{BM}{ME}$的值；若不存在，请说明理由．

例 2 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，平面$PAC\perp$平面 $ABCD$，且$PA\perp AC$，$PA=AD=2$.四边形 $ABCD$ 满足$BC//AD$，$AB\perp AD$，$AB=BC=1$.E为侧棱 PB 的中点，F 为侧棱 PC 上的任意一点．

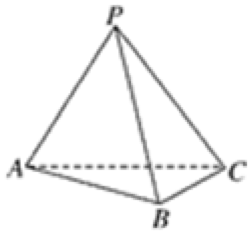
(Ⅰ)若 F 为 PC 的中点，求证：面$EFP\perp$平面 PAB；

(Ⅱ)求证：平面$AFD\perp$平面 PAB；

(Ⅲ)是否存在点 F，使得直线 AF 与平面 PCD 垂直？若存在，写出证明过程并求出线段 PF 的长；若不存在，请说明理由．



1. 如图，在三棱锥$P-ABC$中，不能证明$AP\perp BC$的条件是(   )



A. $AP\perp BP, AP\perp PC$　B. $AP\perp BP, BC\perp PB$

C. 平面$BPC\perp$平面$APC, BC\perp PC$　D. $AP\perp$平面BPC

2. α,β是两个平面，m,n是两条直线，则下列命题中错误的是(   )

A. 如果$m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，那么$\alpha\perp\beta$　B. 如果$m\subset\alpha$，$\alpha//\beta$，那么$m//\beta$

C. 如果$\alpha\cap\beta=l$，$m//\alpha$，$m//\beta$，那么$m//l$

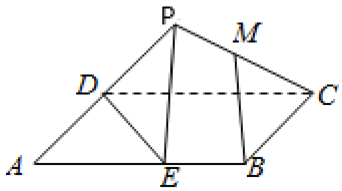
D. 如果$m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n//\beta$，那么$\alpha\perp\beta$

3. 已知α、β是两个不同平面，m,n,l是三条不同直线，则下列命题正确的是()

A. 若$m//\alpha,n\perp\beta$且$m\perp n$，则$\alpha\perp\beta$　B. 若$m\subset\alpha,n\subset\alpha,l\perp n$，则$l\perp\alpha$

C. 若$m//\alpha,n\perp\beta$且$\alpha\perp\beta$，则$m//n$　D. 若$l\perp\alpha$且$l\perp\beta$，则$\alpha//\beta$

4. 已知平行四边形$ABCD$中，$AB=2AD$，$\angle BAD=60°$，E为AB的中点，将$\triangle ADE$沿直线DE翻折成$\triangle PDE$，若M为PC的中点，则$\triangle ADE$在翻折过程中(点$P\notin$平面$ABCD$)，给出以下命题：



①BM的长是定值；　②$BM//$平面PDE；

③存在某个位置，使$PC\perp DE$；　④异面直线BM与DE所成的角的大小是定值.

其中，正确的命题个数是(   )

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

5. 如图，四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E、F分别是AB_1，BC_1的中点，下列结论正确的是(   )

A. $EF//BB_1$　B. $EF//$平面ACC_1A_1

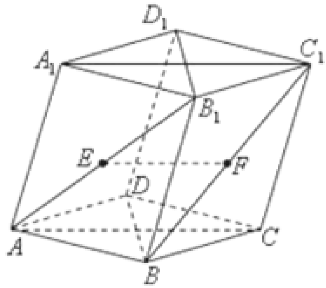
C. $EF//$平面D_1BC　D. $EF//$平面BCC_1B_1

6. 已知m，n是不同的直线，α，β是不同的平面，则下列条件能使$n\perp\alpha$成立的是(   )

A. $\alpha\perp\beta$，$m\subset\beta$　B. $\alpha//\beta$，$n\perp\beta$

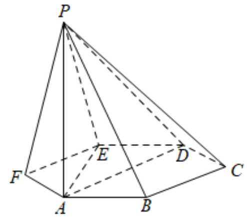
C. $\alpha\perp\beta$，$n//\beta$　D. $m//\alpha$，$n\perp m$

7. 已知六棱锥$P-ABCDEF$的底面是正六边形，$PA\perp$平面 ABC，$PA=2AB$.则下列命题中正确的有(　)



①平面$PAB\perp$平面 PAE；②$PB\perp AD$；③直线 CD 与 PF 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$；

④直线 PD 与平面 ABC 所成的角为$45°$；⑤$CD//$平面 PAE.

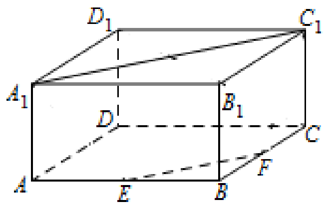


A. ①④　B. ①③④　C. ②③⑤　D.①②④⑤

8. 如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=BC=2AA_1=2$，E，F 分别在 AB，BC 上，则下列说法错误的是(　)

A. 直线 AD 与A_1C_1所成的角为$\frac{\pi}{4}$B. 当 E 为中点时，平面$A_1D_1E\perp$平面B_1C_1E　C. 当 E，F 为中点时，$EF\perp BD_1$

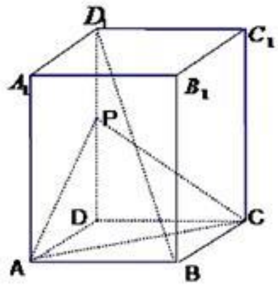
D. 当 E，F 为中点时，$BD_1\perp$平面B_1EF



9 如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AD$，P 是DD_1中点

(Ⅰ)求证：直线$BD_1//$平面 PAC

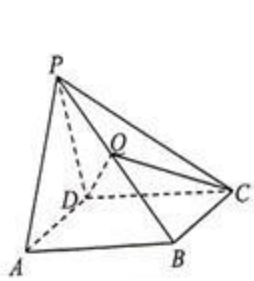
(Ⅱ)在棱BB_1上求一点 Q，使得平面$PAC//$平面A_1C_1Q，并证明你的结论.



10 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，ΔPAD为等边三角形，平面$PAD\perp$平面PCD.

(1)证明：平面$PAD\perp$平面$ABCD$；

(2)若$AB=2$，Q 为线段PB的中点，求三棱锥$Q-PCD$的体积.



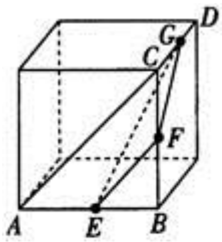
答案和解析

1.【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了直线与平面的位置关系，属于基础题.利用线面平行的判定定理直接判断即可.

【解答】解：把这三条线段放在正方体内如图，显然$AC//EF$，$AC\not\subset$平面 EFG，$EF\subset$平面 EFG，故 $AC//$平面EFG.故选 A 项.



2.【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查线面平行定义及线面平行判定定理，属于基础题.

③中，若直线在平面内，则该直线可与平面内的无数条直线平行，故③不正确.显然①②④正确.

【解答】

解：③中，若直线在平面内，则该直线可与平面内的无数条直线平行，故③不正确.①②④显然正确.

3.【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查面面平行的性质，属于基础题.

由面面平行得到$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$，再由相似三角形得到面积比为相似比的平方，即可得到面积比.

【解答】

解：由题意知，$\because$平面$\alpha//$平面ABC，$AB\subset$平面ABC，

$\therefore AB//$平面α，

又由平面$\alpha\cap$平面$PAB=A'B'$，则$A'B'//AB$，

$\because PA'$：$AA'=2$：3，即PA'：$PA=2$：5，

$\therefore A'B'$：$AB=2$：5，

由于相似三角形得到面积比为相似比的平方，

所以$S_{\triangle A'B'C'}$：$S_{\triangle ABC}=4$：25.

故选B.

4.【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查线面平行的性质定理的应用，根据线面平行性质得到$EF//AC$，$GF//PB$，结合题干中的$PG=2GC$，即可解得答案.

【解答】解：由已知得$EF//AC$，$GF//PB.\therefore \frac{AE}{EB}=\frac{FC}{BF}=\frac{CG}{GP}=\frac{1}{2}$.

故选A.

5.【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查了线面垂直、面面垂直的性质定理和判定定理的运用，熟练掌握定理的题设和结论是解答的关键，属于基础题．

利用线面垂直、面面垂直的性质定理和判定定理对四个命题分别分析解答．

【解答】

解：已知直线$l\perp$平面α，直线$m\subset$平面β，

对于①，若$\alpha//\beta$，得到直线$l\perp$平面β，所以$l\perp m$，故①正确；

对于②，若$\alpha\perp\beta$，直线 l 在β内或者$l//\beta$，则 l 与 m 的位置关系不确定；

对于③，若$l//m$，则直线$m\perp\alpha$，由面面垂直的性质定理可得$\alpha\perp\beta$；故③正确；

对于④，若$l\perp m$，则α与β可能相交不垂直，也可能平行；故④错误；

故选 C.

6.【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查线面垂直的判定与性质，面面垂直的性质，考查推理论证能力，属于基础题．

利用线面垂直的判定与性质，面面垂直的性质，逐项判断，即可得出结论．

【解答】

解：对于 A，$AP\perp PB$，$AP\perp PC$，$PB\cap PC=P$，PB、$PC\subset$平面 PBC，

则$AP\perp$平面 PBC，$BC\subset$平面 PBC，

$\therefore AP\perp BC$，不合题意；

对于 B，$AP\perp PB$，$BC\perp PB$，不能证明$AP\perp BC$，合题意；

对于 C，平面$BPC\perp$平面 APC，平面$BPC\cap$平面$APC=PC$，$BC\perp PC$，$BC\subset$平面 BPC，

$\therefore BC\perp$平面 PAC，又$AP\subset$平面 PAC，

$\therefore BC\perp AP$，不合题意；

对于 D，$AP\perp$平面 PBC，$BC\subset$平面 PBC，

$\therefore AP\perp BC$，不合题意；

故选 B.

7.【答案】D

【解析】解：由α，β是两个平面，m，n 是两条直线，知：

在 A 中，$\because m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$\therefore$由面面垂直的判定定理得$\alpha\perp\beta$，故 A 正确；

在 B 中，$\because m\subset\alpha$，$\alpha//\beta$，$\therefore$由面面平行的性质定理得$m//\beta$，故 B 正确；

在 C 中，$\because\alpha\cap\beta=l$，$m//\alpha$，$m//\beta$，由线面平行的性质定理得$m//l$，故 C 正确；

在 D 中，$\because m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n//\beta$，$\therefore\alpha$与β相交或平行，故 D 错误.

故选：D.

在 A 中，由面面垂直的判定定理得$\alpha\perp\beta$；在 B 中，由面面平行的性质定理得$m//\beta$；在 C 中，由线面平行的性质定理得$m//l$；在 D 中，α与β相交或平行.

本题考查命题真假的判断，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力，是中档题.

8.【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查了空间中线线、线面与面面的位置关系，为综合题，考查学生空间想象能力.

【解答】

解：若$m//\alpha,n\perp\beta$且$m\perp n$，则α与β也有可能平行，故 A 错误；

若$m\subset\alpha,n\subset\alpha,l\perp n$，则 l 与α也有可能平行，故 B 错误；

若$m//\alpha,n\perp\beta$且$\alpha\perp\beta$，m 与 n 有可能垂直，故 C 错误；

若$l\perp\alpha$且$l\perp\beta$，由垂直于同一条直线的两平面平行可得$\alpha//\beta$，故 D 正确.

故选：D.

9.【答案】C

【解析】

【分析】

①设$AB=2AD=2a$，取 CD 的中点 N，连接 MN、BN，则$MN//PD$，$BN//DE$，且$MN=\frac{a}{2}$，$BN=a$，所以$\angle MNB=60°$，在$\triangle BMN$中，由余弦定理知，$BM^2=MN^2+BN^2-2MN\cdot BN\cdot\cos\angle MNB$，所以$BM=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，是定值，即①正确；

②由①可知，$MN//PD$，$BN//DE$，由面面平行的判定定理可知平面$BMN//$平面 PDE，所以$BM//$平面 PDE，即②正确；

③假设存在某个位置，使$PC\perp DE$.连接 CE，由①可知，$DE=a$，$CE=\sqrt{3}a$，而$CD=2a$，所以$CD^2=DE^2+CE^2$，即$DE\perp CE$，由线面垂直的判定定理可知，$DE\perp$平面 PCE，所以 $DE\perp PE$，这与已知矛盾，即③错误；

④由①可知，$\angle MBN$即为异面直线 BM 与 DE 所成的角，易知$\angle MBN=30°$，为定值，即④正确.

本题考查空间中的翻折问题，涉及线面的位置关系和空间角等，熟练掌握空间中线与面平行或垂直的判定定理与性质定理是解题的关键，考查学生的空间立体感和推理论证能力，属于中档题.

【解答】

解：①设$AB=2AD=2a$，取 CD 的中点 N，连接 MN、BN，

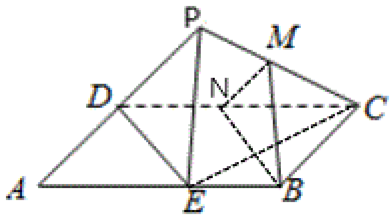
$\because M$、E 分别为 PC、AB 的中点，$\therefore MN//PD$，$BN//DE$，且$MN=\frac{1}{2}PD=\frac{1}{2}AD=\frac{a}{2}$，

$BN=DE=AD=a$，

$\therefore\angle MNB=\angle PDE=\angle ADE=60°$，

在$\triangle BMN$中，由余弦定理知，$BM^2=MN^2+BN^2-2MN\cdot BN\cdot\cos\angle MNB=\frac{a^2}{4}+a^2-2\cdot\frac{a}{2}\cdot a\cdot cos60°=\frac{3}{4}a^2$，

$\therefore BM=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，是定值，即①正确；



②由①可知，$MN//PD$，$BN//DE$，

$\because MN\cap BN=N$，$PD\cap DE=D$，且 MN、$BN\subset$平面 BMN，PD、$DE\subset$平面 PDE，$\therefore$平面 $BMN//$平面 PDE，

又$BM\subset$平面 BMN，$\therefore BM//$平面 PDE，即②正确；

③假设存在某个位置，使$PC\perp DE$.连接 CE，由①可知，$DE=a$，$CE=\sqrt{3}a$，

在$\triangle CDE$中，$CD=2a$，$\therefore CD^2=DE^2+CE^2$，即$DE\perp CE$，

$\because PC\cap CE=C$，PC、$CE\subset$平面 PCE，$\therefore DE\perp$平面 PCE，

又$PE\subset$平面 PCE，$\therefore DE\perp PE$，这与已知矛盾，即③错误；

④由①可知，$\angle MBN$即为异面直线 BM 与 DE 所成的角，

在$\triangle BMN$中，$MN=\frac{1}{2}a$，$BN=a$，$BM=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$\therefore \angle MBN=30°$，为定值，即④正确.

$\therefore$正确的命题为①②④，

故选：C.

10.【答案】B

【解析】

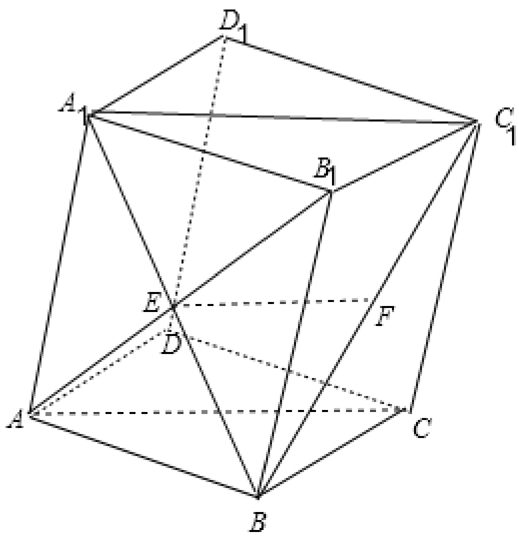
【分析】

利用中点联想到中位线，连接A_1B，易证$EF//$面ACC_1A_1，确定选项.

此题考查了线面平行的证明，属容易题.

【解答】

解：连接A_1B，



则点 E 是A_1B的中点，

在$\triangle BA_1C_1$中，EF 为中位线，

$\therefore EF//A_1C_1$，

$\because EF \not\subset$平面ACC_1A_1，$A_1C_1 \subset$平面ACC_1A_1，

$\therefore EF//$平面ACC_1A_1，

结合正确选项的唯一性，

故选：B.

11.【答案】B

【解析】解：$\alpha \perp \beta$，$m \subset \beta$，不能说明 n 与α的关系，A 错误；

$\alpha//\beta$，$n \perp \beta$能够推出$n \perp \alpha$，正确；

$\alpha \perp \beta$，$n//\beta$可以得到 n 与平面α平行、相交，所以不正确.

$m//\alpha$，$n \perp m$则 n 与平面α可能平行，所以不正确.

故选：B.

$n \perp \alpha$必有 n 平行α的垂线，或者 n 垂直α的平行平面，依次判定选项即可.

本题考查直线与平面垂直的判定，考查空间想象能力，是基础题.

12.【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查命题的真假的判断与应用，涉及空间几何体的直线与平面平行、垂直的判断，直线与平面所成角的求法，是中档题.

利用平面与判断垂直的判断定理判断①；直线与平面垂直判断②；求出直线与平面所成角判断③④；直线与平面平行判断⑤.

【解答】

解：$\because PA\perp$平面 ABC，

$\therefore PA\perp AB$，在正六边形 $ABCDEF$ 中，$AB\perp AE$，$PA\cap AE=A$，

$\therefore AB\perp$平面 PAE，且$AB\subset$面 PAB，

$\therefore$平面$PAB\perp$平面 PAE，故①成立；

$\because$若$PB\perp AD$，又$PA\perp AD$，$PA\cap PB=P$，

$\therefore AD\perp$平面 PAB，

而$AB\subset$平面 PAB，得$AB\perp AD$，

这与题设矛盾，$\therefore$ ②不成立；

$\because CD//AF$，直线 CD 与 PF 所成角为$\angle PFA$或其补角，

在$Rt\triangle PAF$中，$PA=2AF$，

$\therefore \cos\angle PFA=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore$ ③成立；

由题意可知$\angle PDA$为直线 PD 与平面 ABC 所成的角，

在$Rt\triangle PAD$中，$PA=AD=2AB$，

$\therefore \angle PDA=45°$，故④成立；

$\because CD//AF$，$AF\subset$平面 PAF，$CD\not\subset$平面 PAF，

$\therefore CD//$平面 PAF，

而平面$PAF\cap$平面$PAE=PA$，

$\therefore$直线$CD//$平面 PAE 不成立，即⑤不成立.

故选：B.

13.【答案】D

【解析】

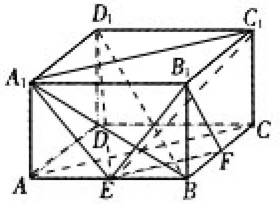
【分析】

本题考查棱柱的结构特征，考查空间想象能力，属于中档题.

由题意画出图形,利用异面直线所成角、线面垂直的判定与性质逐一分析四个选项得答案.

【解答】

解：如图，



$\because A_1C_1//AC$，

$\therefore$直线AD与A_1C_1所成的角为$\angle DAC$，

$\because$底面$ABCD$为正方形，$\therefore \angle DAC=\frac{\pi}{4}$，故A正确；

当E为AB中点时，$A_1E=B_1E=\sqrt{2}$，$A_1B_1=2$，

则$A_1E^2+B_1E^2=A_1B_1^2$，

得到$A_1E\perp B_1E$，

又$A_1D_1\perp$平面A_1ABB_1，$B_1E\subset$平面AA_1B_1B，

则$A_1D_1\perp B_1E$，

又$A_1E\perp B_1E$，$A_1D_1\cap A_1E=A_1$，A_1D_1，$A_1E\subset$平面A_1D_1E，

可得$B_1E\perp$平面A_1D_1E，

又$B_1E\subset$平面B_1C_1E，

$\therefore$平面$A_1D_1E\perp$平面B_1C_1E，故B正确；

当E，F为中点时，$EF//AC$，

$\because DD_1\perp$底面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，

$\therefore DD_1\perp AC$，由底面$ABCD$为正方形，可得$AC\perp BD$，

又$BD\cap DD_1=D$，BD，$DD_1\subset$平面BDD_1，

$\therefore AC\perp$平面BDD_1，又$BD_1\subset$平面BDD_1，

$\therefore AC\perp BD_1$，又$AC//EF$，故 $EF\perp BD_1$，故 C 正确；

若$BD_1\perp$平面B_1EF，$B_1E\subset$平面B_1EF，

则$BD_1\perp B_1E$，又$B_1E\perp A_1D_1$，

由$BD_1\cap A_1D_1=D_1$，BD_1，$A_1D_1\subset$平面A_1D_1B，

可得$B_1E\perp$平面A_1D_1B，

又$A_1B\subset$平面A_1D_1B，可得$A_1B\perp B_1E$，显然错误，故 D 错误.

故选 D.

14.【答案】①③

【解析】

【分析】

本题考查线面与面面位置关系的判定，属于中档题目.

由线面平行、面面垂直的判定定理进行证明即可.

【解答】

解：如图，∵在直三棱柱$ABC-A_1B_lC_1$中，平

面α与棱 AB，AC，A_1C_1，A_1B_1分别交于点 E，F，G，H，且直线$AA_1//$平面α.

$\therefore AA_1\overset{//}{=}EH\overset{//}{=}GF$，

∴四边形 $EFGH$ 是平行四边形，故①正确；

∵ EF与 BC 不一定平行，

∴平面α与平面BCC_1B_1平行或相交，故②错误；

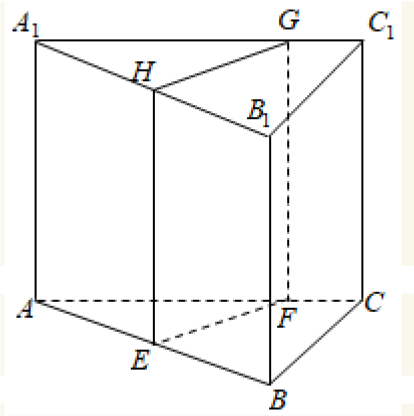
∵ $AA_1\overset{//}{=}EH\overset{//}{=}GF$，且$AA_1\perp$平面 $BCEF$，

∴ $EH\perp$平面 $BCEF$，

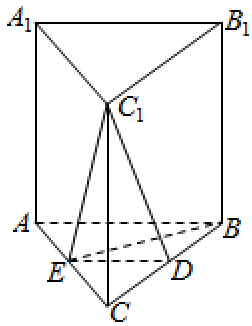
∵ $EH\subset$平面α，

∴平面$\alpha\perp$平面 $BCFE$，故③正确.

故答案为①③.



15.【答案】证明：(1) ∵在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D，E 分别为 BC，AC 的中点，



$\therefore DE//AB$，$AB//A_1B_1$，$\therefore DE//A_1B_1$，

$\because DE\subset$平面DEC_1，$A_1B_1\not\subset$平面DEC_1，

$\therefore A_1B_1//$平面DEC_1.

解：(2) ∵在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，E 是 AC 的中点，$AB=BC$.

$\therefore BE\perp AA_1$，$BE\perp AC$，

又$AA_1\cap AC=A$，$\therefore BE\perp$平面ACC_1A_1，

$\because C_1E\subset$平面ACC_1A_1，$\therefore BE\perp C_1E$.

【解析】(1)推导出$DE//AB$，$AB//A_1B_1$，从而$DE//A_1B_1$，由此能证明$A_1B_1//$平面DEC_1.

(2)推导出$BE\perp AA_1$，$BE\perp AC$，从而$BE\perp$平面ACC_1A_1，由此能证明$BE\perp C_1E$.

本题考查线面平行、线线垂直的证明，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，考查数形结合思想，是中档题.

16.【答案】(Ⅰ)证明：连接 BD 交 AC 于 O 点，连接 OP，因为 O 为矩形对角线的交点，

O 为 BD 的中点，P 为DD_1的中点，则$OP//BD_1$，

又因为$OP\subset$平面 PAC，$BD_1\not\subset$平面 PAC，

所以直线$BD_1//$平面 PAC.

(Ⅱ)解：取BB_1的中点 Q，则平面$PAC//$平面A_1C_1Q，

证明：因为 P 为DD_1的中点，Q 为BB_1的中点，

四边形ACC_1A_1与长方体的上下底面相交 AC，A_1C_1，则$AC//A_1C_1$，

因为$A_1C_1 \not\subset$平面 PAC，$AC \subset$平面 PAC，

$\therefore A_1C_1//$平面 PAC，

同理可得$A_1Q//$平面 PAC，

又$A_1C_1 \cap A_1Q = A1$，$A_1C_1 \subset$平面A_1C_1Q，$A_1Q \subset$平面A_1C_1Q，

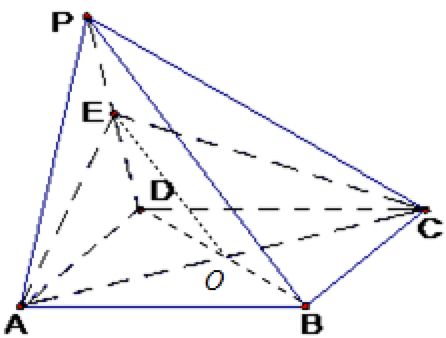
所以平面$PAC//$平面A_1C_1Q.

【解析】本题主要考察空间几何体中线面平行的判定以及面面平行的判定定理，难度适中.

(Ⅰ)连接 BD 交 AC 于 O 点，连接 OP，因为 O 为矩形对角线的交点，O 为 BD 的中点，P 为DD_1的中点，则$OP//BD_1$，再由线面平行的判断定理可得直线$BD_1//$平面 PAC.

(Ⅱ)取BB_1的中点 Q，得$A_1C_1//$平面 PAC，同理可得$A_1Q//$平面 PAC，由面面平行得判定定理即得证.

17.【答案】解：如图：



(1)连结 BD 交 AC 于 O，连结 EO，

$\because O$、E 分别为 BD、PD 的中点，

$\therefore EO//PB$，$EO\subset$平面 EAC，$PB\not\subset$平面 EAC，

$\therefore PB//$平面 EAC.

(2) $\because \left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}矩形ABCD\Rightarrow CD\perp AD\\ 面PAD\cap 面ABCD=AD\\ 面ABCD\perp 面PAD\end{array}\right\}\Rightarrow CD\perp 面PAD\\ CD\subset 面PDC\end{array}\right\}\Rightarrow 面PDC\perp 面PAD$，

$CD\subset$面 $ABCD$，正三角形 PAD 中，E 为 PD 的中点，$\therefore AE\perp PD$，

又面$PDC\cap$面$PAD=PD$，$AE\subset$面 PAD，

$\therefore AE\perp$平面 PCD.

(3)由(2)$AE\perp$平面 PCD，直线 AC 与平面 PCD 所成的角为$\angle ACE$.

$\therefore Rt\triangle ACE$中，$\angle ACE=30°$，$AC=2AE$，

又正$\triangle PAD$中,$AE=\frac{\sqrt{3}}{2}AD$，

$\therefore AC=\sqrt{3}AD$，又矩形$ABCD$中,$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}$，

由$\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{3}AD$，解得$CD=\sqrt{2}AD$，

$\therefore \frac{CD}{AD}=\sqrt{2}$.

【解析】【试题解析】

本题主要考查了直线与平面平行的判定，直线与平面垂直的判定和直线与平面所成角，属于一般题.

(1)连结 BD 交 AC 于 O，连结 EO，可证$EO//PB$，即可证明$PB//$平面 EAC.

(2)要证明$AE\perp$平面 PCD，只要证明$AE\subset$面 PAD，且平面$PAD\perp$平面 PDC 即可.

(3)由(2)可得直线 AC 与平面 PCD 所成的角为$\angle ACE$，可求正$\triangle PAD$中,$AE=\frac{\sqrt{3}}{2}AD$，$AC=\sqrt{3}AD$，又$\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{3}AD$，解得$CD=\sqrt{2}AD$，从而求得$\frac{CD}{AD}=\sqrt{2}$.

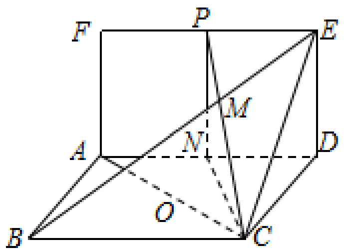
18.【答案】解：(1)菱形 $ABCD$，$AD=DC$，$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，则ΔADC是等边三角形，

又 N 是线段 AD 的中点，$\therefore CN\perp AD$.

又平面$ADEF\perp$平面 $ABCD$，平面$ADEF\cap$平面$ABCD=AD$，

所以$CN\perp$平面 $ADEF$.

又$\because AF\subset$平面 $ADEF$，故$CN\perp AF$.



(2)取 FE 的中点 P，连接 CP 交 BE 于点 M，M 点即为所求的点.

证明：连接 PN，$\because PE//AD$，$AD//BC$，$\therefore PE//BC$，

所以 CP 与 BE 相交于点 M，$\because N$是 AD 的中点，P 是 FE 的中点，

$\therefore PN//AF$，又$PN\subset$平面 MNC，$AF\not\subset$平面 MNC，

$\therefore$直线$AF//$平面 MNC.

又$\because PE//BC$，$\therefore \frac{BM}{ME}=\frac{BC}{PE}=2$.

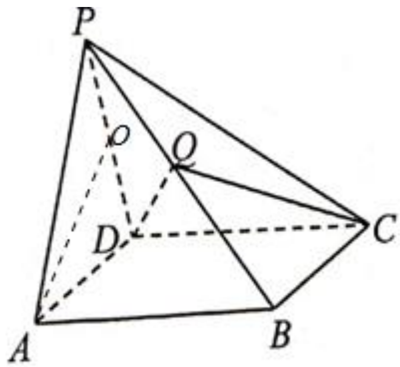
【解析】本题考查空间线、面位置关系，证明线线垂直以及线面平行的探究和证明，要注意空间垂直关系的相互转化，考查直观想象、逻辑推理能力，属于中档题.

(1)由已知可得ΔADC是等边三角形，N是线段AD的中点，得$CN\perp AD$，根据面面垂直的性质定理证得$CN\perp$平面$ADEF$，即可证明结论；

(2)取FE的中点P，可证$PE//BC$，连接CP交BE于点M，M点即为所求的点.

利用$PE//BC$，可得$\frac{BM}{ME}=\frac{BC}{PE}$，即可求出结论.

19.【答案】(Ⅰ)证明：取PD的中点O，连接AO，



$\because\triangle PAD$为等边三角形，$\therefore AO\perp PD$，

$\because AO\subset$平面PAD，平面$PAD\cap$平面$PCD=PD$，平面$PAD\perp$平面PCD，

$\therefore AO\perp$平面PCD，

$\because CD\subset$平面PCD，$\therefore AO\perp CD$，

$\because$底面$ABCD$为正方形，$\therefore CD\perp AD$，

$\because AO\cap AD=A$，$\therefore CD\perp$平面PAD，

又$\because CD\subset$平面$ABCD$，$\therefore$平面$PAD\perp$平面$ABCD$；

(Ⅱ)解：由(Ⅰ)知，$AO\perp$平面PCD，

$\therefore A$到平面PCD的距离$d=AO=\sqrt{3}$.

$\because$底面$ABCD$为正方形，$\therefore AB//CD$，

又$\because AB\not\subset$平面PCD，$CD\subset$平面PCD，

$\therefore AB//$平面PCD，

$\therefore A$，B两点到平面PCD的距离相等，均为d，

又Q为线段PB的中点，

$\therefore Q$到平面PCD的距离$h=\frac{d}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由(Ⅰ)知，$CD\perp$平面PAD，

$\because PD\subset$平面PAD，$\therefore CD\perp PD$，

$\therefore V_{Q-PCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle PCD}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】(Ⅰ)取 PD 的中点 O，连接 AO，由已知可得$AO\perp PD$，再由面面垂直的判定可得$AO\perp$平面 PCD，得到$AO\perp CD$，由底面 $ABCD$ 为正方形，得$CD\perp AD$，由线面垂直的判定可得$CD\perp$平面 PAD，则平面$PAD\perp$平面 $ABCD$；

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，$AO\perp$平面 PCD，求出 A 到平面 PCD 的距离$d=AO=\sqrt{3}$，进一步求得 Q 到平面 PCD 的距离$h=\frac{d}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，再由(Ⅰ)知，$CD\perp$平面 PAD，得$CD\perp PD$，然后利用棱锥体积公式求解.

本题考查平面与平面垂直的判定，考查空间想象能力与思维能力，训练了多面体体积的求法，是中档题.

20.【答案】解：(Ⅰ)$\because E$、F 分别为侧棱 PB、PC 的中点，

$\therefore EF//BC$.

$\because BC//AD$，$\therefore EF//AD$.

$\because$面$PAC\perp$平面 $ABCD$，且$PA\perp AC$，面$PAC\cap$平面$ABCD=AC$，

$\therefore PA\perp$平面 $ABCD$，结合$AD\subset$平面 $ABCD$，得$PA\perp AD$.

又$\because AB\perp AD$，$PA\cap AB=A$，

$\therefore AD\perp$平面 PAB，$\therefore EF\perp$平面 PAB.

$\because EF\subset$平面 EFP，

$\therefore$平面$EFP\perp$平面 PAB.

(Ⅱ)$\because$平面$ABCD\perp$平面 PAC，

平面$ABCD\cap$平面$PAC=AC$，且$PA\perp AC$，$PA\subset$平面 PAC.

$\therefore PA\perp$平面 $ABCD$，结合$AD\subset$平面 $ABCD$，得$PA\perp AD$.

又$\because AB\perp AD$，$PA\cap AB=A$，

$\therefore AD\perp$平面 PAB，

$\because AD\subset$平面 AFD，

$\therefore$平面$AFD\perp$平面 PAB.

(Ⅲ)存在点 F，使得直线 AF 与平面 PCD 垂直.

平面 PCA 中，过点 A 作$AF\perp PC$，垂足为 F

$\because$由已知$AB\perp AD$，$BC//AD$，$AB=BC=1$，$AD=2$.

$\therefore$根据平面几何知识，可得$CD\perp AC$.

又$\because$由(Ⅱ)$PA\perp$平面 $ABCD$，得$PA\perp CD$，且$PA\cap AC=A$，

$\therefore CD\perp$平面 PAC，结合$AF\subset$平面 PAC，得$CD\perp AF$.

又$\because CD\cap PC=C$，

$\therefore AF\perp$平面 PCD.

在$\triangle PAC$中，$PA=2$，$AC=\sqrt{2}$，$\angle PAC=90°$，

$\therefore PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=\sqrt{6}$，$AF=\frac{PA\cdot AC}{AC}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.$PF=\sqrt{PA^2-AF^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore PC$上存在点 F，使得直线 AF 与平面 PCD 垂直，此时线段 PF 的长为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

【解析】本题在特殊四棱锥中求证线面垂直和面面垂直，并求线段的长度．着重考查直线和平面垂直的判定和性质，两个平面垂直的判定定理的应用等知识，属于中档题.

(Ⅰ)由三角形中位线定理结合$BC//AD$，证出$EF//AD$.利用面面垂直性质定理，证出$PA\perp$平面 $ABCD$，得$PA\perp AD$；

结合$AB\perp AD$得到$AD\perp$平面 PAB，从而可得$EF\perp$平面PAB.最后根据面面垂直判定定理，可得平面$EFP\perp$平面 PAB;

(Ⅱ)根据平面$ABCD\perp$平面 PAC 和$PA\perp AC$，证出$PA\perp$平面 $ABCD$，得$PA\perp AD$，结合$AB\perp AD$证出$AD\perp$平面 PAB，利用面面垂直判定定理，可得平面$AFD\perp$平面 PAB.

(Ⅲ)过点 A 作$AF\perp PC$于 F，根据平面几何知识，结合题中数据算出$CD\perp AC$，结合(Ⅱ)的结论证出$PA\perp CD$，可得$CD\perp$平面 PAC，得到$CD\perp AF$，从而证出$AF\perp$平面PCD.最后在$\triangle PAC$中利用勾股定理和等积转换算出$PF=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，即可得到 PC 上存在点 F 使得直线 AF 与平面 PCD 垂直.