

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第一学期午间练 13

学校: _____ 姓名: _____ 班级: _____ 学号: _____

一、单选题 (本大题共 2 小题, 共 10.0 分)

1. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(3x+1) = 2x-3$ 且 $f(a) = 1$, 则实数 a 的值为 ()
A. -7 B. -6 C. 7 D. 6
2. 设函数 $f(x) = x+2$, $g(x) = x^2 - x - 1$. 用 $M(x)$ 表示 $f(x)$, $g(x)$ 中的较大者, 记为 $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, 则 $M(x)$ 的最小值是 ()
A. 1 B. 3 C. 0 D. $-\frac{5}{4}$

二、多选题 (本大题共 1 小题, 共 5.0 分)

3. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(\frac{1}{x}) = \frac{2x+1}{x+1}$, 则关于函数 $f(x)$ 正确的说法是 ()
A. $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \neq -1\}$ B. $f(x)$ 值域为 $\{y|y \neq 1, \text{ 且 } y \neq 2\}$
C. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减 D. 不等式 $f(x) > 2$ 的解集为 $(-1, 0)$

三、单空题 (本大题共 2 小题, 共 10.0 分)

4. 函数 $f(x) = |x|(1-x)$ 的单调递增区间是 _____.
5. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则满足 $f(2x-1) < f(\frac{1}{3})$ 的 x 的取值范围是 _____.

四、解答题 (本大题共 1 小题, 共 12.0 分)

6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 若对于任意的实数 x, y , 都有 $f(x) + f(y) = f(x+y)$, 且 $x < 0$ 时, 有 $f(x) < 0$.
(1) 判断并证明函数 $f(x)$ 的单调性;
(2) 设 $f(1) = 1$, 若 $f(x) < 2m^2 - 2am + 1$ 对所有 $x \in [-1, 1]$, $a \in [-2, 2]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

答案和解析

1.C 2.A

3.BCD

解: 令 $t = \frac{1}{x} (t \neq 0)$, 则 $x = \frac{1}{t}$, 所以 $f(t) = \frac{2 \times \frac{1}{t} + 1}{\frac{1}{t} + 1} = \frac{2+t}{1+t}$, $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = \frac{2+x}{1+x} = 1 + \frac{1}{1+x}$.

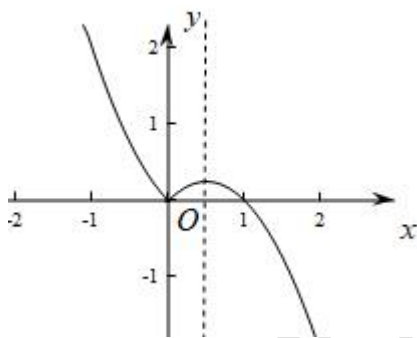
A选项, 定义域为 $\{x | x \neq 0 \text{ 且 } x \neq -1\}$, 即 A 错误; B选项, 当 $x \neq 0$ 时, $y \neq 2$,

当 $x \neq -1$ 时, $y \neq 1$, 所以值域为 $\{y | y \neq 1 \text{ 且 } y \neq 2\}$, 即 B 正确; C选项, $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$

在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 即 C 正确; D选项, $f(x) = \frac{2+x}{1+x} > 2$, 即 $\frac{2+x-2(1+x)}{1+x} > 0$, 等价于

$x(x+1) < 0$, 解得 $-1 < x < 0$, 即 D 正确.

4. 【答案】 $[0, \frac{1}{2}]$ $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x \geq 0 \\ x^2 - x, & x < 0 \end{cases}$, 其图象如图:



可知 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[0, \frac{1}{2}]$. 故答案为 $[0, \frac{1}{2}]$.

5. 【答案】 $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ $f(x)$ 为偶函数, 由 $f(2x-1) < f(\frac{1}{3})$ 得 $f(|2x-1|) < f(\frac{1}{3})$

又 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $|2x-1| < \frac{1}{3}$, 解得 $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$.

6. 【答案】 解: (1) $f(x)$ 在 R 上为单调递增函数,

证: 令 $x = y = 0$, 则 $f(0) = f(0) + f(0)$, $f(0) = 0$, 令 $y = -x$, 则 $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$, 所以 $f(-x) = -f(x)$, $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数,

任取 $x_1, x_2 \in R$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) + f(-x_2) = f(x_1 - x_2)$, 当 $x < 0$ 时, 有 $f(x) < 0$, 所以 $f(x_1 - x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 故 $f(x)$ 在 R 上为单调递增函数;

(2) 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值为 $f(1) = 1$,

使 $f(x) < 2m^2 - 2am + 1$ 对所有 $x \in [-1, 1]$, $a \in [-2, 2]$ 恒成立, 只要 $2m^2 - 2am + 1 >$

1 , 即 $2m^2 - 2am > 0$ 恒成立, 令 $g(a) = 2m^2 - 2am = -2am + 2m^2$, 则 $\begin{cases} g(-2) > 0 \\ g(2) > 0 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} 4m + 2m^2 > 0 \\ -4m + 2m^2 > 0 \end{cases}$, 解得 $m > 2$ 或 $m < -2$, 故实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.