

# 核心素养视角下的高考试题难度探析<sup>①</sup>

——以2019年高考数学全国卷(理科)为例

刘清 胡典顺 张莘铤

(华中师范大学数学与统计学学院 430079)

## 1 问题提出

《普通高中数学课程标准(2017年版)》指出数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现,是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现.国际PISA测试在对阅读素养、数学素养及科学素养进行界定时,指出这三大素养代表了学生在某一领域的能力.因此素养是抽象的,数学学科核心素养也不容易直接根据其内涵进行测评.在实际操作中,对于一道试题难度的统计,教研者一般采取该试题的通过率(客观题)或平均得分率(简答题)来作为该试题的难度.这样的计算方法得到的试题难度与学生的解答情况密切相关,甚至可以认为该试题的难度由学生决定,但是一道试题的难度应该是由它自身所决定,因此上述统计方法存在较大的误差.鲍建生提出的综合难度模型用于刻画试题的综合难度,得到了国内许多专家学者的认可,他指出,一道数学题的综合难度主要由以下五个难度因素来体现:探究、背景、运算、推理以及知识含量<sup>[2]</sup>.不仅如此,为了更直观地体现其难度,他对上述五个主要难度因素进行水平划分,并对每一级水平赋值,依此描绘出刻画试题难度的雷达图,根据雷达图分析课程综合难度.

核心素养的测评是以区分度为主要依据的,而区分度与难度又有重要联系<sup>[3]</sup>,所以考虑试题难度和核心素养之间的有机联系.在实际命题过程中既要注重核心素养的嵌入也要把控试题难

度,以达到提高试题区分度和考查数学学科核心素养的双重目标.本文基于2019年高考数学全国卷理科卷,建立综合素养水平的概念,试图探讨一道试题所蕴含的核心素养与其难度的关系,并基于结果得出相应的启示.

## 2 建立综合素养水平概念

### 2.1 数学关键能力评价指标框架

《普通高中数学课程标准(2017年版)》提出了六大核心素养,分别是数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析,对这六大核心素养进行了三级水平划分.然而,在对具体数学试题进行划分操作中,由于理论的抽象性,很难进行判定该试题的核心素养水平.对于数学学科核心素养的描述,喻平对六个数学关键能力的三级水平划分给出了六个核心素养三级水平的操作性定义,为试题核心素养水平的实践性划分提供了简便易行的方法<sup>[4]</sup>.具体内容见表1.

表1 数学关键能力评价指标框架

类别	知识理解 (一级水平)	知识迁移 (二级水平)	知识创新 (三级水平)
数学抽象	理解基本概念、命题、规则	在情境中抽象出数学问题	抽象出新概念、命题、方法
逻辑推理	掌握推理的基本形式和规则	验证结论或发现简单结论	发现、验证、解决一些复杂问题
数学建模	掌握常规的数学模型	在情境中建立数学模型	用多种知识和方法建模

① 基金项目:教育部人文社会科学研究规划基金项目——中小学核心素养测评的模型建构与实证研究(19YJA880012);中央高校基本科研业务费专项资金资助——基于学习分析技术的高中数学核心素养评价模型研究(CCNU19TS029);中央高校基本科研业务费项目“教师教育专项”(CCNUTE2020-04).

类别	知识理解 (一级水平)	知识迁移 (二级水平)	知识创新 (三级水平)
直观想象	理解基本图形的性质	利用图形探索数学问题	构建数学问题的直观模型
数学运算	理解基本的运算规则	多个规则的综合运算	设计运算程序、解决复杂问题
数据处理	掌握基本的数学处理工具	常规方法分析情境中的数据	构建模型、方法分析数据

## 2.2 综合素养水平概念的构建

为了使核心素养水平与试题难度的比较分析更为直观,本文在数学关键能力评价指标框架的基础上,建立综合素养水平的概念,对于每一道试题,探究其蕴含的核心素养的综合水平,第一步,

需要对核心素养的每一级水平赋予特定的值,在进行量化的同时,还要有比较好的区分度,即区分一、二、三级水平,并且在计算综合核心素养水平时,要体现一道试题所蕴含的核心素养水平越高,那么综合素养水平也相应地较高这一特点,因此,可以对每个核心素养的水平分别赋予1、3、7的数值.第二步,计算该试题的综合素养水平.综合素养水平的计算公式如下: $d = \frac{\sum n_i d_{ij}}{n}$ .在上述公式中, $d$ 代表综合素养水平, $d_{ij}$ 代表核心素养*i*的第*j*级水平的赋值, $n_i$ 代表蕴含核心素养*i*的题目个数, $n$ 代表题目总数.例如,一组试题一共设置了3个小问题*a, b, c*,它的核心素养水平表如下:

表2 核心素养水平表

关键能力	数学抽象			逻辑推理			数学建模			直观想象			数学运算			数据分析			
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
<i>a</i>										√			√						
<i>b</i>										√			√						
<i>c</i>		√								√			√						

根据计算公式,得到该组试题的综合素养水平为3.

## 2.3 案例分析

基于全国卷高考数学试题的参考答案中,选择题和填空题没有给出详细解答步骤,所以对试题核心素养水平的划分将分为两部分,对于给出参考答案的解答题,将根据答案进行划分核心素养水平;对于省略具体解答步骤只提供参考答案的选择题和填空题,将尽可能少地采用特殊技巧,更多地采取一般方法解答,按照上述表格给出的操作性定义,以答案为依据对试题的核心素养水平进行划分.

下面以2019年高考数学全国卷I第17题为例,对其作核心素养水平划分.

**题目**  $\triangle ABC$ 的内角*A, B, C*的对边分别为*a, b, c*,设 $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \cdot \sin C$ . (1)求*A*; (2)若 $\sqrt{2}a + b = 2c$ ,求 $\sin C$ .

**参考答案** (1)由已知得 $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$ ,故由正弦定理得 $b^2 + c^2 - a^2$

$$= bc, \text{由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}.$$

因为 $0^\circ < A < 180^\circ$ ,所以 $A = 60^\circ$ .

(2)由(1)知 $B = 120^\circ - C$ ,由题设及正弦定理得 $\sqrt{2} \sin A + \sin(120^\circ - C) = 2 \sin C$ ,

$$\text{即 } \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos C + \frac{1}{2} \sin C = 2 \sin C,$$

$$\text{可得 } \cos(C + 60^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由于 $0^\circ < C < 120^\circ$ ,所以 $\sin(C + 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

故 $\sin C = \sin(C + 60^\circ - 60^\circ) = \sin(C + 60^\circ) \cdot$

$$\cos 60^\circ - \cos(C + 60^\circ) \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

**核心素养水平分析** 第1小问是正余弦定理的一个简单应用进行计算,因此,这一小问主要蕴含的核心素养应是数学运算,且水平为一级;第2小问包含的知识点是正余弦定理以及两角和与差公式,对这三个知识点的应用计算,因此这一小问

主要蕴含的核心素养为数学运算,对照数学关键能力评价指标框架,数学运算水平应为二级;考虑到在解答过程中,已经得到了  $\cos(C+60^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  需要判断  $\sin(C+60^\circ)$  的正负性,需要根据已有的条件和结论对  $(C+60^\circ)$  的范围进行判断,

所以这一小问还蕴含了逻辑推理这一核心素养,且水平为一级.因此建立本题的核心素养水平表如下,综合核心素养水平分析:

$$d = \frac{\sum n_i d_{ij}}{n} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{3} = \frac{5}{3}$$

表3 17题核心素养水平表

关键能力	数学抽象			逻辑推理			数学建模			直观想象			数学运算			数据分析			
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
17(1)													√						
17(2)				√										√					

3 试题综合难度的量化计算

为了更客观地反映试题难度,本文选择了鲍建生提出的试题综合难度模型,模型的构建方法如下所述.

鲍建生认为,数学题的综合难度由以下五个难度因素来体现:探究、背景、运算、推理以及知识含量<sup>[2]</sup>.不仅如此,他将这五个难度因素进行了水平划分,如下表所示.

表4 综合难度因素的水平划分

难度因素	水平			
探究	识记	理解	探究	
背景	无实际背景	个人生活	公共常识	科学情境
运算	无运算	数值运算	简单符号运算	复杂符号运算
推理	无推理	简单推理	复杂推理	
知识含量	单个知识点	两个知识点	三个以上知识点	

在经过等级变量赋值后,根据模型计算公式得到五个难度因素量化后的取值,由此构建五边形,根据五边形来分析题目的综合难度.为了使得本文的探究清晰明了,所以对综合难度作进一步量化,即采用计算五边形的“面积”作为综合难度的一个数值体现.如图1,若五个因素的判定值分别为  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ,那么该五边形的面积计算公式是

$$S = \frac{\sin 72^\circ}{2} (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5 + x_5 x_1),$$

本文中取  $\sin 72^\circ \approx 0.95$ .

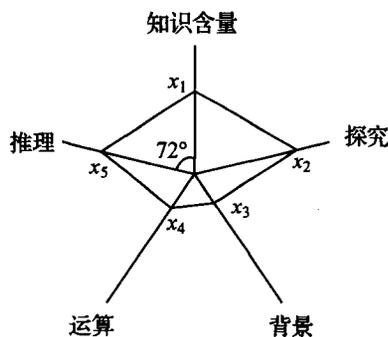


图1 综合难度五边形

例如,经过分析计算,得到一组试题的五个难度因素取值分别为 2, 3, 4, 5, 6,那么由此构建的五边形如图2所示,它的“面积”为 38.为了尽可

能减少误差,所以在接下来的数据统计和分析中,用于刻画试题综合难度的五个因素都按图1顺序进行计算其“面积”。

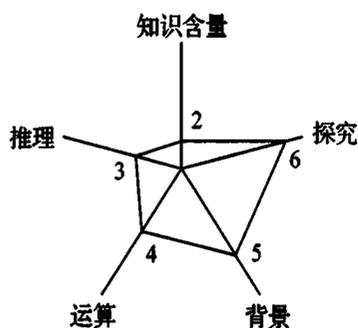


图2 综合难度五边形

#### 4 基于2019年高考数学全国卷I、II、III卷(理科)的综合素养水平和试题综合难度分析

本研究采用增加样本数量的方法,增加研究

结果的可信度,因此选取2019年高考数学全国I、II、III卷理科卷(以下我们不再对所讨论的试卷一一标明)共三份试卷,根据数学关键能力评价指标框架以及综合难度因素的水平划分表来进行数据统计,分别计算综合素养水平和试题综合难度,进行比较分析。由于全国卷中的第22题与第23题属于选做题,不同省市的考生根据选学内容进行相应选择,从而没有相对的统一性。因此,下述分析将对全国卷中的第22题与第23题不予以讨论。

#### 4.1 以2019年高考数学全国I卷为例的综合素养水平和试题综合难度具体分析

根据喻平提出的数学关键能力评价指标框架<sup>[4]</sup>,得到2019年高考数学全国I卷的数学关键能力评价双向细目表,并在右侧计算综合素养水平,见表5,其中 $d$ 代表综合素养水平。

表5 2019年高考数学全国I卷数学关键能力评价双向细目表

关键能力	数学抽象			逻辑推理			数学建模			直观想象			数学运算			数据分析			$d$
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
1										√			√						2
2										√			√						2
3										√			√						2
4				√				√					√						5
5				√						√			√						3
6				√				√					√			√			6
7				√									√						2
8				√															1
9				√									√						4
10										√				√					8
11						√					√								10
12						√	√				√		√						12
13													√						3
14													√						1
15						√		√					√			√			12
16					√					√			√						7
17(1)													√						3.5
17(2)				√									√						

关键能力	数学抽象			逻辑推理			数学建模			直观想象			数学运算			数据分析			$d$
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
18(1)					√						√								9.5
18(2)		√									√				√				
19(1)				√											√				11
19(2)						√									√				
20(1)						√									√				15.5
20(2)						√					√				√				
21(1)		√		√				√					√			√			12.3
21(2)i		√			√			√						√					
21(2)ii		√			√			√							√				

从表中可以看到,“√”分布的密集度大致分为三个部分,即第1题至第12题,第13题至第16题以及第17题至第21题,也就是选择题、填空题和解答题.对比最右侧计算得到的综合素养水平,在每个部分内,综合素养水平相应的开始有增大的趋势.根据传统教学观念,选择题部分最后两题、填空题最后两题以及解答题最后两题,一般都会是压轴题,难度较大,区分度较高,而综合素养水平的变化趋势与这相吻合.下面根据鲍建生的试题综合难度模型对全国I卷进行综合难度分析,并计算每道题的五边形“面积”,见表6.

表6 2019年全国I卷数学试题综合难度双向细目表

题号	探究	背景	运算	推理	知识含量	“面积”
1	1	1	3	1	2	5.225
2	1	1	3	1	1	4.275
3	1	1	2	1	2	4.275
4	2	2	3	1	1	7.6
5	2	1	5	3	1	12.825
6	2	2	1	2	1	5.7
7	1	1	4	1	1	5.225
8	2	1	2	1	1	4.275
9	1	1	4	1	2	6.175
10	2	1	5	4	2	18.525
11	2	1	3	4	4	19.475
12	2	1	6	5	4	31.35
13	1	1	2	1	2	4.275
14	1	1	3	1	2	5.225

题号	探究	背景	运算	推理	知识含量	“面积”
15	2	2	2	4	1	10.45
16	2	1	2	6	3	19
17	1	1	3	1	2	5.225
18	1.5	1	3	2.5	2	9.5
19	2	1	4	2.5	2.5	12.94375
20	3	1	4.5	5.5	2.5	25.4125
21	2	2	3.66	1.66	1.66	11.14882

从表中可以看到,在选择题部分、填空题部分以及解答题部分,五边形的“面积”有三个最大值,分别出现在第12题、第16题以及第20题,而且在每个部分内,五边形的“面积”都是呈现出增大的趋势,这和表6所得出的综合素养水平的变化趋势相一致,为了能够更加直观地体现综合素养水平和试题综合难度的变化,现在将题目号作为横坐标,每个题目的综合素养水平以及对应的五边形“面积”作为纵坐标,绘制折线图,得到图3.

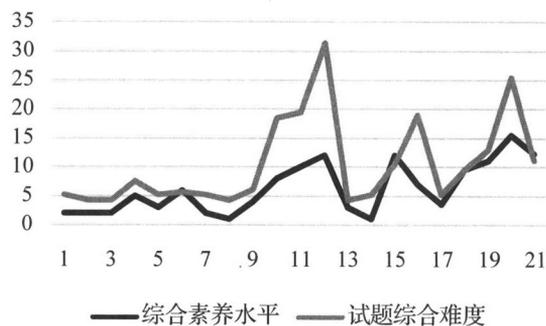


图3 全国I卷试题综合素养水平和试题综合难度对比图

从图中可以看到,2019年高考数学全国I卷试题的综合素养水平和试题综合难度曲线的变化趋势大致相同,所体现出来的峰值的位置也几乎相同,低谷位置也大致相同,没有明显的异常值.由此可以看出,分选择题、填空题、解答题三个部分来看,全国I卷的试题难度都遵循由低到高的规律,相比较而言,难度较大的题目往往出现在选择题后两题、填空题后两题以及解答题后两题.

#### 4.2 全国II、III卷综合素养水平和试题综合难度分析

重复上述数据统计和分析的步骤,得到全国II、III卷的试题综合素养水平和试题综合难度对比图,见图4和图5.

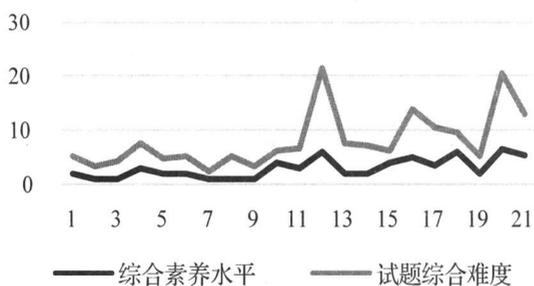


图4 全国II卷综合素养水平与综合难度对比图

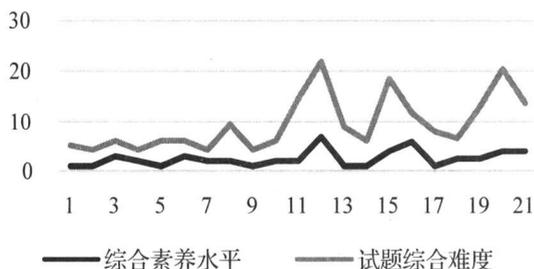


图5 全国III卷综合素养水平与综合难度对比图

从图4中可以看到,用于刻画试题综合难度的“面积”曲线仍然显示出三个峰值,它们出现在第12题,第16题以及第20题,与全国I卷的峰值位置相同;虽然综合素养水平曲线的峰值不大,但是和“面积”曲线的峰值位置大致一致.两条曲线相对比,可以看出存在两个异常点,即15题以及18题,除此之外,变化的大致趋势一致.在图5中,用于刻画试题综合难度的“面积”曲线显示出四个峰值,它们是第8题、第12题、第15题以及第20题;试题综合难度曲线只有两个峰值,第12题、第16题,异常点出现在第8题、第18题以及第21题,除此之外,两条折线变化趋势也相一致.

由此可以看出,全国II卷与全国III卷的试题难度所遵循的分布规律与全国I卷相同.而对于图4、图5中显示的异常点,有可能是误差所导致的.在本项研究中的数据统计和分析中,存在如下几个误差.(1)在对2019年高考数学全国卷进行核心素养水平划分以及分析全国卷的数学试题综合难度双向细目表时,但是依然会存有主观因素所导致的误差;(2)为了给试题综合难度进行量化,在计算五边形的“面积”时,对 $\sin 72^\circ$ 采取了近似值的办法,且固定了五个因素的排列顺序,因而也会存在一定误差.

## 5 结论与启示

### 5.1 结论

三个折线图都无一例外的显示出了三个高峰,分别出现在选择题最后两题其中之一,填空题最后两题其中之一以及解答题倒数第二题,体现了全国卷压轴题的位置.因此可以看出,全国卷的命题设置采用的是由简到难,难度循序渐进的方式,有利于考生合理安排做题顺序和考试时间,发挥正常水平.同时,由折线图可以看到,综合素养水平与试题综合难度两者的变化趋势大致相同,这说明一道试题所考查的综合素养水平与它的难度应该有着密切联系.除去由于主观因素的所导致的误差,从图中可以看出,一般而言,综合素养水平越高的试题,其难度也越高;反之,综合素养水平越低,则该试题的难度越低.

### 5.2 启示

#### (1) 把控试题难度,提高试卷区分度

任子朝指出,通常的高考试卷并不一定每道题都具有高区分度,但测试诸如理解、掌握、综合运用和灵活运用等高层次的思维活动时,要有高区分度的试题.根据上述分析,可以看到2019年高考数学全国卷试题综合难度曲线以及综合素养水平曲线的高峰一般是选择题最后两题,填空题最后两题以及解答题最后两题,这些题作为压轴题必须具有较好的区分度,才能达到人才选拔的目的.压轴题的难度较大,要平衡整体试卷难度,应当在其他题目适当降低难度.从本研究结果可以知道,综合素养水平与试题综合难度有着密切的联系,两者变化趋势几乎一致,因而,在试卷命制中,把控试题的难度可以考虑从以下两个方面入手:变化试题所蕴含的核心素养个数或者试题

所蕴含的核心素养的水平级数.对于非压轴题,可以考虑综合少数核心素养并将水平级数控制在二级以内,而对于压轴题,可以提高其综合性,一道试题蕴含多个核心素养且适当提高核心素养的水平.

### (2)理解核心素养内涵,丰富核心素养的操作性定义

核心素养是抽象的概念,很多专家学者都在研究其内涵,试图提出其更具操作性的定义.喻平基于知识理解,知识迁移以及知识创新层面对核心素养进行三级水平划分;彭艳贵等人从宏观和微观两个维度描述核心素养的内涵<sup>[5]</sup>.万变不离其宗,不论何种操作性定义,都应当回归核心素养本质.厘清目前已有文献对核心素养的研究,作为借鉴,在其基础上探索、丰富,明确理论与实践相结合的理念,以核心素养的内涵以及核心素养提出的目的为根本出发点,制定有效的试题,分析现实中普遍学生核心素养的测评情况,以此在实践中修正并丰富核心素养的操作性定义,如此循环,不断完善,才能逐步提高核心素养测评体系的质量.

### (3)分析试题欠缺之处,加强核心素养测评体系的实践性

在核心素养成为趋势的大环境下,根据核心素养合理命制试题愈发重要.根据数学关键能力

评价指标框架进行分析试卷试题,可以发现试卷的欠缺之处.以2019年高考数学全国卷I为例,可以看出其蕴含的逻辑推理、数学运算、数学建模以及直观想象这四大核心素养居多,而数学抽象和数据分析这两大核心素养涉及较少,这不利于学生的学习能力全面发展.加强对大规模教育考试的评价有利于提高考试的科学性,而试题难度以及区分度对提高考试的质量没有实质性的帮助<sup>[3]</sup>.考试不应被认为只是评估、诊断或人才选拔的工具,它也应是核心素养测评体系的重要实践.作为教研人员,在分析学生考试情况时,不应看重学生分数的高低,而应更注重学生的核心素养发展情况.对学生的核心素养发展情况的分析,不仅可以作为修正核心素养测评体系的指标,也可以丰富核心素养融入试卷的实践经验.

### 参考文献

- [1]喻平. 数学学科核心素养评价的一个框架[J]. 数学教育学报, 2017, 26(2): 19-23+59
- [2]鲍建生. 中英两国初中数学期望课程综合难度的比较[J]. 全球教育展望, 2002, 31(9): 48-52
- [3]雷新勇. 大规模教育考试科学属性之理论和实践思考[J]. 教育与考试, 2007(1): 31-37
- [4]喻平. 基于核心素养的高中数学课程目标与学业评价[J]. 课程·教材·教法, 2018, 38(1): 80-85
- [5]彭艳贵, 徐斌. 高中生数学学科核心素养测评框架的理论分析[J]. 教育理论与实践, 2019, 39(23): 49-52
- (上接第19页)
- ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics, 2016
- [25] Siu, M. K. The confluence of the Yellow River and the Mediterranean [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [26] Barbin, E, Rogers, L. Geometry in the secondary school curriculum and in progression to university [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [27] Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1996, 27(3), 293-309
- [28] Miller, G. A. *Historical Introduction to Mathematical Literature*. New York: The Macmillan Company, 1927: 38-39
- [29] Radford, L. Father Padilla's *Arithmetica practica* (1732) in its cultural colonial Guatemalan context [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [30] 李尚志. 核心素养渗透数学课程教学[J]. 数学通报, 2018(1): 1-6
- [31] 李尚志. 核心素养渗透数学课程教学(续)[J]. 数学通报, 2018(2): 1-5
- [32] 章建跃. 树立课程意识 落实核心素养[J]. 数学通报, 2016(5): 1-4
- [33] 郭玉峰. 基于核心素养的国际数学课程教材改革动向及启示[J]. 数学通报, 2019(6): 9-14