

小题也有大价值

——一道椭圆基本性质题的变式探究

徐继林 范习昱

江苏省镇江市丹徒高级中学 212143

[摘要] 探究无处不在,哪怕是一道非常普通的小题,也可挖掘其中非凡的教学价值.文章解构一道椭圆基本性质题,旨在从具体操作层面探讨如何进行变式教学.

[关键词] 小题;变式;探究

在评讲一次高二校际联考试卷时,发现一道很简单、很普通的填空题,考查椭圆的基本性质,课堂上十分钟我就讲完了,学生也没什么大的疑问,可是一位不怎么爱说话的男生却告诉我还有更好的方法,就是下文要介绍的优化解法,正是这一小小的插曲让我的思想涟漪慢慢飘远,一道小题的探究之旅开始启程.

母题再现:已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点,点 P 在椭圆上, $\triangle POF_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形,则 $b^2 =$ _____.

解法探究

法一:传统解法

利用正三角形的性质求出点 P 的坐标,代入椭圆方程,找出三个变量 a, b, c 的关系即可.由 $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$,解 $c=2$,容

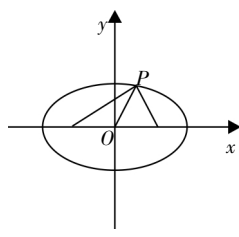


图1

易求得 $P\left(\frac{c}{2}, \frac{\sqrt{3}c}{2}\right)$,即 $P(1, \sqrt{3})$ 代入,有 $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1$. 又 $a^2 - b^2 = 4$,故 $b^2 = 2\sqrt{3}$.

法二:优化解法

连接 PF_1 中利用 $\triangle PF_2F_1$ 特殊关系求出三边,再利用椭圆定义求解 a, b, c 得到答案.不难得到 $\triangle PF_2F_1$ 是直角三角形,且 $\angle PF_1F_2 = \frac{\pi}{6}$,同法一求得 $c=2$,所以 $PF_2 = 2, PF_1 = 2\sqrt{3}$. 由椭圆定义 $2a = PF_1 + PF_2 = 2\sqrt{3} + 2$,解 $a = \sqrt{3} + 1$,故 $b^2 = 2\sqrt{3}$.

评析:传统解法的运算略显困难,主要原因在于两个二次方程的求解较复杂,

方法一可以适当改进,由椭圆第一定义,即 $2a = PF_1 + PF_2 = \sqrt{(1+2)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} + \sqrt{(1-2)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = 2\sqrt{3} + 2$ 可以达到简化运算的目的,但如果数据变化,也就很难体现其优势,并且推广为 $\triangle POF_2$ 是面积为 S 的正三角形时,很难计算,不具有通法的推广意义.方法二能简化运算的原因在于充分利用了 $\triangle PF_2F_1$ 特殊三边关系(几何性质),发现 PF_2, PF_1 是这个直角三角形的两条直角边,再利用椭圆定义得到 a 的值,进而算出 $b^2 = 2\sqrt{3}$.

变式探究

1. 推广为一般情况

变式1:已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点,点 P 在椭圆上, $\triangle POF_2$ 是面积为 S 的正三角形,则 $b^2 =$ _____.

解析:利用优化解法, $PF_2 = c, PF_1 = \sqrt{3}c$,由椭圆定义 $2a = PF_1 + PF_2 = c + \sqrt{3}c$,解 $a =$

作者简介:徐继林(1981-),中学一级教师,江苏省镇江市数学骨干教师,2019年曾获江苏省信息化课堂基本功赛课省一等奖,从事高中数学教育教学研究;范习昱(1980-),中学一级教师,从事高中数学教育教学以及解题教学研究.

$\frac{\sqrt{3}+1}{2}c$, 故 $b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}c^2$. 又 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$, 故 $b^2 = 2S$.

2. 改变三角形条件

变式2: 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, 点 P 在椭圆上, $\triangle PO F_2$ 是面积为 4 的等腰直角三角形, 且直角顶点是点 P , 则 $b^2 =$ _____.

解析: 利用等腰直角三角形的性质和面积求出点 P 的坐标, 代入椭圆方程, 找出三个变量 a, b, c 的关系即可. 由 $4 = \frac{1}{4}c^2$, 解得 $c = 4$, 容易求得 $P\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$, 即 $P(2, 2)$, 代入 $\frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$. 又 $a^2 - b^2 = 16$, 故 $b^2 = 4\sqrt{5} - 4$.

变式3: 已知 A_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右顶点, 点 P 在椭圆上, $\triangle POA_2$ 是面积为 1 的等腰直角三角形, 且直角顶点是点 P , 则 $b^2 =$ _____.

解析: 利用等腰直角三角形的性质和面积求出点 P 的坐标, 代入椭圆方程, 找出两个变量 a, b 的关系即可. 由 $\triangle POA_2$ 的面积 $1 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a$, 解得 $a = 4$, 容易求得 $P\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, 即 $P(2, 2)$, 代入 $\frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$, 故 $b^2 = \frac{16}{3}$.

评析: 将条件简单变化, 举一反三, 真正做到会一题就会一类, 解决学生上课听懂了, 下课不会做的顽疾. 同时, 对学生思维的深层开发也可以起到很大的作用.

4. 改变提问方式(存在问题)

变式4: 已知 A_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右顶点, 椭圆上是否存在点 P , 使 $\triangle POA_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形?

解析: 假设椭圆上存在点 P , 使 $\triangle POA_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形, 则利用正三角形的面积 $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 解得 $a^2 = 4$, 而 P 的坐标 $\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$, 即 $P(1,$

$\sqrt{3})$ 代入椭圆方程, $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1$, 解得 $b^2 = 4$. 这与椭圆中 $a^2 > b^2$ 矛盾, 故假设不对, 即椭圆上不存在点 P , 使 $\triangle POA_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形.

变式5: 已知 B_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的下顶点, 椭圆上是否存在点 P , 使 $\triangle POB_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形?

解析: 假设椭圆上存在点 P , 使 $\triangle POB_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形, 则利用正三角形的面积 $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$, 解得 $b^2 = 4$, 而 P 的坐标 $\left(\frac{\sqrt{3}b}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, 即 $P(\sqrt{3}, -1)$ 代入椭圆方程, $\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, 解得 $a^2 = 4$. 这与椭圆中 $a^2 > b^2$ 矛盾, 故假设不对, 即椭圆上不存在点 P , 使 $\triangle POB_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形.

5. 改变提问方式(推广)

变式6: 已知 A_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右顶点, 椭圆上是否存在点 P , 使得 $\triangle POA_2$ 是面积为 S 的正三角形?

解析: 由 $\triangle POA_2$ 是面积为 S 的正三角形, 则 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 而 P 的坐标 $\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$, 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 即 $\frac{1}{4} + \frac{3a^2}{4b^2} = 1$, 解得 $a^2 = b^2$. 这与椭圆中 $a^2 > b^2$ 矛盾, 故假设不对, 即椭圆上不存在点 P , 使 $\triangle POA_2$ 是面积为 S 的正三角形.

变式7: 已知 B_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的下顶点, 椭圆上是否存在点 P , 使得 $\triangle POB_2$ 是面积为 S 的正三角形?

解析: 假设椭圆上存在点 P , 使 $\triangle POB_2$ 是面积为 S 的正三角形, 则利用正三角形的面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$, 而 P 的坐标 $\left(\frac{\sqrt{3}b}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ 代入椭圆方程, $\frac{3b^2}{4a^2} + \frac{1}{4} = 1$, 解得 $a^2 = b^2$, 这与椭圆中 $a^2 > b^2$ 矛盾, 故假设不对, 即椭圆上不存在点 P , 使 $\triangle POB_2$ 是面积为 S 的正三角形.

评析: 改变提问方式是变式教学的

一个常见方法, 由变式6和变式7不难发现, 椭圆上其实是不存在点 P , 使得 $\triangle POA_2$ 为正三角形的, 哪来面积可言呢? 这都是我在教学探究过程中发现的, 一道小题, 价值一点也不小啊!

6. 改变背景为双曲线、抛物线

变式8: 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, 点 P 在双曲线上, $\triangle PO F_2$ 是面积为 S 的正三角形, 则 $b^2 =$ _____.

解析: 仿照优化解法, $PF_2 = c$, $PF_1 = \sqrt{3}c$, 由椭圆定义 $2a = PF_1 - PF_2 = \sqrt{3}c - c$, 解得 $a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}c$, 故 $b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}c^2$. 又 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$, 故 $b^2 = 2S$.

变式9: 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, A_2 为右顶点, 双曲线上是否存在点 P , 使 $\triangle PF_2A_2$ 是正三角形? (不存在)

变式10: 已知 F 为抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点, O 为抛物线顶点, 抛物线上是否存在点 P , 使 $\triangle PFO$ 是正三角形? (不存在)

评析: 圆锥曲线本源一致, 很多性质和结论都是类似的, 将本题背景推广为双曲线, 发现了相应的结论. 这也是知识的正向迁移, 是培养学生类比能力的有效途径. 我想, 在课堂条件允许下, 开展这样的探究教学, 无疑对学生内化知识、提升数学核心素养、形成综合能力作用巨大.

结束语

这道很小很小的习题, 那么平凡, 那么简单, 如果我一带而过, 也就没有上述还算精彩的探究之旅了, 我为那份试卷评讲之前备课不充分和些许肤浅深感内疚. 幸运的是, 我虽然花了半节课的时间返工, 弥补了之前的疏忽, 却完成了自己感觉不错的变式探究教学. 从这道小题的探究过程, 我们应该受到很大的启发: 关注教学中的每一个细节, 你会发现蕴藏其中的精彩, 用心思考, 小题也有大价值!