

江苏省仪征中学 2020 届高三考前数学热身练 4

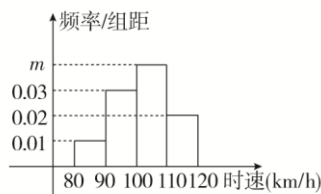
班级_____ 姓名_____ 学号_____ 日期_____ 评价_____

一、填空题：

1. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

2. 已知纯虚数 z 满足 $(1-i)z = 2+ai$, 则实数 a 等于_____.

3. 某高速公路移动雷达测速检测车在某时段对某段路过往的 400 辆汽车的车速进行检测, 根据检测的结果绘制出如图所示的频率分布直方图, 根据直方图的数据估计 400 辆汽车中时速在区间 $[90, 110)$ 的约有_____辆.

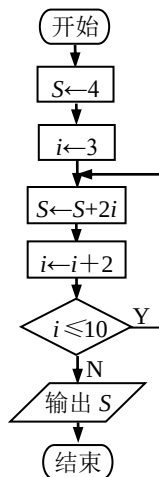


4. 函数 $f(x) = \sqrt{1-2x} + \lg x$ 的定义域为_____.

5. 在直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{\lambda} = 1 (\lambda > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则 λ 的值为_____.

6. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 的值为_____.

7. 展览会会务组安排了分别标有序号为“1号”、“2号”、“3号”的三辆车, 采用等可能随机的顺序前往酒店接嘉宾. 某与会嘉宾设计了两乘车方案. 方案一: 不乘坐第一辆车, 若第二辆车的车序号大于第一辆车的车序号, 就乘坐此车, 否则乘坐第三辆车; 方案二: 直接乘坐第一辆车. 则该嘉宾坐到“3号”车的概率是_____.



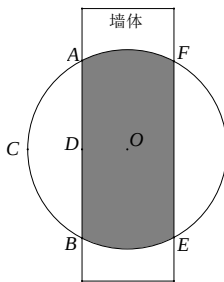
(第 6 题图)

8. 已知函数 $f(x) = x \cos x$, 则 $f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线的斜率为_____.

9. 已知 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和, 若公比 $q = 2$, 则 $\frac{a_1 + a_3 + a_5}{S_6}$ 的值是_____.

10. 已知 $\sqrt{2} \sin \alpha = \cos(\alpha + \frac{\pi}{4})$, 则 $\tan(\alpha - \frac{\pi}{4})$ 的值是_____.

11. 《九章算术》是我国古代著名数学经典. 里面对勾股定理的论述比西方早一千多年, 其中有这样一个问题: “今有圆材埋在壁中, 不知大小. 以锯锯之, 深一寸, 锯道长一尺. 问径几何?” 其意为: 今有一圆柱形木材, 埋在墙壁中, 不知其大小, 用锯去锯该材料, 锯口深一寸, 锯道长一尺. 问这块圆柱形木料的直径是多少? 长为 1 丈的圆柱形木材部分镶嵌在墙体中, 截面图如图所示 (阴影部分为镶嵌在墙体内部的部分). 已知弦 $AB = 1$ 尺, 弓形高 $CD = 1$ 寸, 估算该木材的体积约为_____ (立方寸).



(第 11 题图)

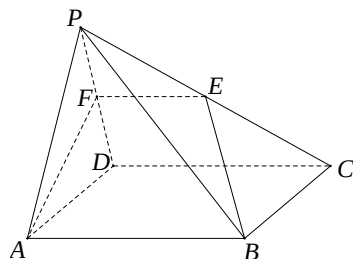
(注: 1 丈 = 10 尺 = 100 寸, $\pi \approx 3.14$)

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x + 2|, & 0 < x \leq 1, \\ 3 - \sqrt{x}, & x > 1, \end{cases}$ 若存在互不相等的正实数 x_1, x_2, x_3 , 满足 $x_1 < x_2 < x_3$ 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 则 $x_3 f(x_1)$ 的最大值为_____.

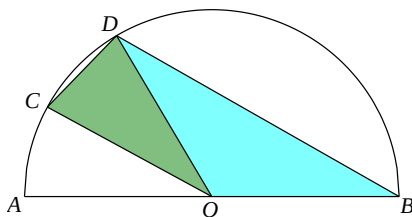
13. 已知点 P 为正方形 $ABCD$ 内部一点 (包含边界), E, F 分别是线段 BC, CD 中点. 若 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DP} = 0$, 且 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AE} + \mu \overrightarrow{AF}$, 则 $\lambda + \mu$ 的取值范围是_____.
14. 已知 D 是 $\triangle ABC$ 边 AC 上一点, 且 $CD = 3AD$, $BD = \sqrt{2}$, $\cos \angle ABC = \frac{1}{4}$, 则 $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ 的最大值为_____.

二、解答题:

1. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, 点 E 在棱 PC 上 (异于点 P, C), 平面 ABE 与棱 PD 交于点 F .
- (1) 求证: $AB \parallel EF$;
- (2) 若 $AF \perp EF$, 求证: 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.



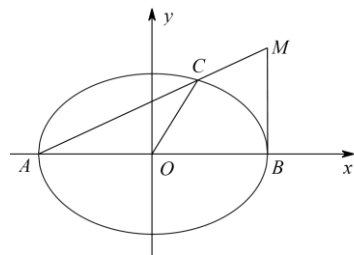
2. 如图, 某公园内有一半圆形人工湖, O 为圆心, 半径为 1 千米. 为了人民群众美好生活的需要, 政府为民办实事, 拟规划在 $\triangle OCD$ 区域种荷花, 在 $\triangle OBD$ 区域建小型水上项目. 已知 $\angle AOC = \angle COD = \theta$.
- (1) 求四边形 $OCDB$ 的面积 (用 θ 表示);
- (2) 当四边形 $OCDB$ 的面积最大时, 求 BD 的长 (最终结果可保留根号).



3. 如图, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 短轴长为 2, 左、右顶点分别为 A, B . 设点 $M(\sqrt{2}, m) (m > 0)$, 连接 MA 交椭圆于点 C .

(1) 求该椭圆的标准方程;

(2) 若 $OC = CM$, 求四边形 $OBMC$ 的面积.



三、附加题:

1. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设点 $P(x, 5)$ 在矩阵 $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 对应的变换下得到点 $Q(y-2, y)$, 求 $\mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

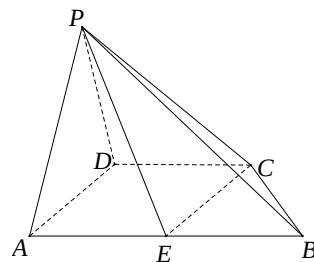
2. 在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点 O 为极点，以 x 轴非负半轴为极轴，建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ ，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = -2 + \cos \alpha, \\ y = \sin \alpha \end{cases} (\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2})$ ，求 l 与曲线 C 交点的直角坐标.

3. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2CD = 2BC = 2AD = 4$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $AE = BE$ ， $\triangle PAD$ 为正三角形，且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 求二面角 $P-EC-D$ 的余弦值；

(2) 线段 PC 上是否存在一点 M ，使得异面直线 DM 和 PE 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{8}$ ？

若存在，指出点 M 的位置；若不存在，请说明理由.



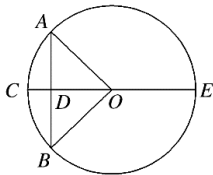
参考答案

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分.

1. $\{x|1 < x \leq 2\}$ 2. 2 3. 280 4. $(0, \frac{1}{2}]$ 5. 2
 6. 52 7. $\frac{5}{6}$ 8. $-\frac{\pi}{2}$ 9. $\frac{1}{3}$ 10. $-\frac{1}{2}$
 11. 53066 12. 4 13. $[1 - \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3}]$ 14. $\frac{16\sqrt{5}}{5}$

解答与提示:

1. $A \cap B = \{x|1 < x \leq 2\}$.
2. $z = \frac{2+ai}{1-i} = \frac{(2+ai)(1+i)}{2} = \frac{2-a}{2} + \frac{2+a}{2}i$. 因为 z 为纯虚数, 所以 $\begin{cases} 2-a=0, \\ 2+a \neq 0, \end{cases}$ 解得 $a=2$.
3. 由图可知, 时速在区间 $[80, 90)$, $[110, 120)$ 的频率为 $(0.01+0.02) \times 10 = 0.3$, 所以时速在区间 $[90, 110)$ 的频率为 $1-0.3$, 所以时速在区间 $[90, 110)$ 的车辆约为 $400 \times 0.7 = 280$ 辆.
4. 由 $\begin{cases} 1-2x \geq 0, \\ x > 0, \end{cases}$ 解得 $0 < x \leq \frac{1}{2}$, 即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, \frac{1}{2}]$.
5. 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{1+\lambda}}{1} = \sqrt{3}$, 所以 $\lambda = 2$.
6. 执行第一次循环 $S=10, i=5$; 执行第二次循环 $S=20, i=7$;
 执行第三次循环 $S=34, i=9$; 执行第四次循环 $S=52, i=11$, 终止循环.
 所以 $S=52$.
7. 记方案一与方案二坐到“3 号”车的概率分别为 P_1, P_2 , 三辆车的出车顺序可能为: 123, 132, 213, 231, 312, 321. 方案一坐“3 号”车可能: 132, 213, 231, 所以 $P_1 = \frac{3}{6}$; 方案二坐“3 号”车可能: 312, 321, 所以 $P_2 = \frac{2}{6}$. 则该嘉宾坐到“3 号”车的概率 $P = P_1 + P_2 = \frac{5}{6}$.
8. $f'(x) = \cos x - x \sin x$, 所以在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的切线的斜率为 $k = f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$.
9. $\frac{a_1 + a_3 + a_5}{S_6} = \frac{\frac{a_1[1-(q^2)^3]}{1-q^2}}{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}} = \frac{1}{1+q} = \frac{1}{3}$.
10. 因为 $\sqrt{2} \sin \alpha = \cos(\alpha + \frac{\pi}{4})$, 解得 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, 所以 $\tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{1}{3} - 1}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}$.
11. 如图, $AB=10$ (寸), 则 $AD=5$ (寸), $CD=1$ (寸), 设圆 O 的半径为 x (寸), 则 $OD=(x-1)$ (寸). 在 $Rt\triangle ADO$, 由勾股定理可得



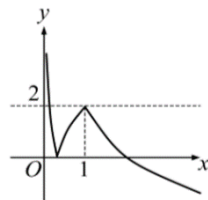
$5^2 + (x-1)^2 = x^2$, 解得 $x=13$ (寸), 则该木材的体积约为

$$100\pi x^2 = 100\pi \times 13^2 = 16900\pi \approx 53066 \text{ (立方寸)}.$$

12. 函数 $f(x)$ 的图象如右图所示, 由题意, $0 < f(x_3) < 2$, 即 $1 < x_3 < 9$,

因为 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 所以 $x_3 f(x_1) = x_3(3 - \sqrt{x_3})$, 令

$t = \sqrt{x_3} \in (1, 3)$, 构造函数 $g(t) = -t^3 + 3t^2$, $g'(t) = -3t^2 + 6t$, 所以当 $t=2$ 时, $g(t)_{\max} = g(2) = 4$, 所以 $x_3 f(x_1)$ 的最大值为 4.



13. 设正方形 $ABCD$ 的边长为 a , 以 A 为原点, AB, AD 所在直线为分

别为 x, y 轴建立平面直角坐标系, 则 $A(0, 0), B(a, 0), C(a, a), D(0, a)$. 设 $P(x, y)$,

因为 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DP} = 0$, 所以 $(x-a)(y-a) = 0$, 即 $(x-\frac{a}{2})^2 + (y-\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$, 设

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \theta, \\ y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sin \theta. \end{cases}$$

又因为 $E(a, \frac{a}{2}), F(\frac{a}{2}, a)$, $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AE} + \mu \overrightarrow{AF}$, 所以 $(x, y) = \lambda(a, \frac{a}{2}) + \mu(\frac{a}{2}, a)$, 即

$$\begin{cases} x = \lambda a + \mu \frac{a}{2}, \\ y = \lambda \frac{a}{2} + \mu a, \end{cases} \text{ 所以 } \lambda + \mu = \frac{2}{3a}(x+y) = \frac{2}{3a}[\frac{3a}{2} + \frac{a}{2}(\sin \theta + \cos \theta)] = 1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}), \text{ 由}$$

P 为正方形 $ABCD$ 内部一点 (包含边界), 可得 $\theta \in [\pi, 2\pi]$, 所以 $\theta + \frac{\pi}{4} \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$, 所

$$\lambda + \mu = 1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \in [1 - \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3}].$$

14. 法一: 设 $AD=t$, 则 $CD=3t$, $AC=4t$,

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, } \cos \angle ADB = \frac{t^2 + (\sqrt{2})^2 - c^2}{2\sqrt{2}t},$$

$$\text{在 } \triangle BDC \text{ 中, } \cos \angle BDC = \frac{(3t)^2 + (\sqrt{2})^2 - a^2}{2\sqrt{2} \cdot 3t},$$

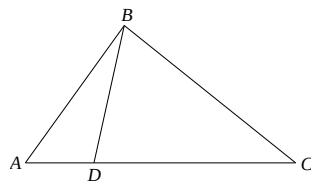
$$\text{又 } \cos \angle ADB = -\cos \angle BDC,$$

$$\text{所以 } \frac{t^2 + (\sqrt{2})^2 - c^2}{2\sqrt{2}t} = -\frac{(3t)^2 + (\sqrt{2})^2 - a^2}{2\sqrt{2} \cdot 3t}, \text{ 解得 } 12t^2 = 3c^2 + a^2 - 8, \text{ ①}$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } AC^2 = (4t)^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \text{ 即 } 16t^2 = a^2 + c^2 - \frac{1}{2}ac, \text{ ②}$$

$$\text{由 ①② 可得 } a^2 + 9c^2 + \frac{3}{2}ac = 32.$$

$$\text{所以 } 32 = (a+3c)^2 - \frac{3}{2}a(3c) \geq (a+3c)^2 - \frac{3}{2} \times (\frac{a+3c}{2})^2 = \frac{5}{8}(a+3c)^2,$$



所以 $S(\theta) = S_{\triangle OCD} + S_{\triangle OBD} = \frac{1}{2}OC \cdot OD \sin \theta + \frac{1}{2}OB \cdot OD \sin(\pi - 2\theta)$,3 分

因为 $OB = OC = OD = 1$, 所以 $S(\theta) = \frac{1}{2}(\sin \theta + \sin 2\theta)$.

因为 $\theta > 0, \pi - 2\theta > 0$, 所以 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

所以四边形 $OCDB$ 的面积 $S(\theta) = \frac{1}{2}(\sin \theta + \sin 2\theta), \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$6 分

(2) 由 (1) $S(\theta) = \frac{1}{2}(\sin \theta + \sin 2\theta), \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,

所以 $S'(\theta) = (\frac{1}{2}\sin \theta)' + (\sin \theta \cos \theta)' = \frac{1}{2}\cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(4\cos^2 \theta + \cos \theta - 2)$,

令 $S'(\theta) = 0$, 即 $4\cos^2 \theta + \cos \theta - 2 = 0$, 解得 $\cos \theta = \frac{-1+\sqrt{33}}{8}$ 或 $\cos \theta = \frac{-1-\sqrt{33}}{8}$,

因为 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以存在唯一的 θ_0 , 使得 $\cos \theta_0 = \frac{-1+\sqrt{33}}{8}$10 分

当 $0 < \theta < \theta_0$ 时, $S'(\theta) > 0$, $S(\theta)$ 在 $(0, \theta_0)$ 单调递增;

当 $\theta_0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $S'(\theta) < 0$, $S(\theta)$ 在 $(\theta_0, \frac{\pi}{2})$ 单调递减,

所以 $\theta = \theta_0$ 时, $S(\theta)_{\max} = S(\theta_0)$,12 分

此时 $BD^2 = OB^2 + OD^2 - 2OB \cdot OD \cos(\pi - 2\theta_0)$

$$= 1 + 1 + 2\cos 2\theta_0 = 2 + 2(2\cos^2 \theta_0 - 1) = 4\cos^2 \theta_0,$$

从而 $BD = 2\cos \theta_0 = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ (千米).

答: 当四边形 $OCDB$ 的面积最大时, BD 的长为 $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ 千米.14 分

3. 解: (1) 因为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 短轴长为 2,

$$\text{所以 } \begin{cases} 2b = 2, \\ a^2 = b^2 + c^2, \text{ 解得 } a = \sqrt{2}, b = 1, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

所以该椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$4 分

(2) 因为点 $M(\sqrt{2}, m) (m > 0), A(-\sqrt{2}, 0)$,

所以直线 AM 的方程为 $y = \frac{m}{2\sqrt{2}}(x + \sqrt{2})$, 即 $y = \frac{\sqrt{2}m}{4}(x + \sqrt{2})$.

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \\ y = \frac{\sqrt{2}m}{4}(x + \sqrt{2}), \end{cases} \quad \text{消去 } y \text{ 得 } (m^2 + 4)x^2 + 2\sqrt{2}m^2x + 2m^2 - 8 = 0. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{设 } C(x_0, y_0), \text{ 则 } -\sqrt{2}x_0 = \frac{2m^2 - 8}{m^2 + 4}, \text{ 所以 } x_0 = -\frac{\sqrt{2}m^2 - 4\sqrt{2}}{m^2 + 4}, \text{ 所以 } y_0 = \frac{4m}{m^2 + 4}.$$

$$\text{连接 } OM, \text{ 取 } OM \text{ 的中点 } R, \text{ 则 } R(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{m}{2}), \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

连接 CR , 因为 $OC = CM$, 所以 $CR \perp OM$.

$$\text{又 } k_{OM} = \frac{m}{\sqrt{2}}, k_{CR} = \frac{y_0 - \frac{m}{2}}{x_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4m - m^3}{4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}m^2},$$

$$\text{所以 } \frac{m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4m - m^3}{4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}m^2} = -1, \text{ 即 } m^4 + 2m^2 - 8 = 0,$$

$$\text{因为 } m > 0, \text{ 所以 } m = \sqrt{2}, \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\text{所以四边形 } OBMC \text{ 的面积 } S = S_{\triangle ABM} - S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} - \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 + 4} = \frac{4}{3}.$$

$$\dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

三、附加题

$$1. \text{ 解: 依题意 } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - 2 \\ y \end{bmatrix}, \text{ 即 } \begin{cases} x + 10 = y - 2, \\ 3x + 20 = y, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = -4, \\ y = 8, \end{cases} \quad 3 \text{ 分}$$

$$\text{由逆矩阵公式知, 矩阵 } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ 的逆矩阵 } \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -10 \end{bmatrix}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$2. \text{ 解: 直线 } l: \rho(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta) = \sqrt{2},$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的直角坐标方程为 } x - y + 2 = 0. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{曲线 } C \text{ 的普通方程为 } (x + 2)^2 + y^2 = 1 \text{ } (-3 \leq x \leq -2), \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0, \\ (x + 2)^2 + y^2 = 1 \text{ } (-3 \leq x \leq -2), \end{cases} \quad \text{消去 } y \text{ 整理得 } 2x^2 + 8x + 7 = 0,$$

$$\text{则 } x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以交点坐标为 } (-2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}). \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$3. \text{ 解: 设 } O \text{ 是 } AD \text{ 中点, } \triangle PAD \text{ 为正三角形, 则 } PO \perp AD.$$

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $PO \subset$ 平面 PAD ,

所以 $PO \perp$ 面 $ABCD$.

又因为 $AD = AE = 2$, $\angle DAB = 60^\circ$,

所以 $\triangle ADE$ 为正三角形,

所以 $OE \perp AD$.

建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$,

则 $P(0, 0, \sqrt{3})$, $E(0, \sqrt{3}, 0)$, $C(-2, \sqrt{3}, 0)$, $D(-1, 0, 0)$,

于是

$$\overrightarrow{PC} = (-2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}), \overrightarrow{PE} = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}), \overrightarrow{DP} = (1, 0, \sqrt{3})$$

.....2 分

(1) 设平面 PEC 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$,

由 $\overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \overrightarrow{PE} \cdot \mathbf{n}_1 = 0$, 得一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (0, 1, 1)$,

平面 EDC 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (0, 0, 1)$, 所以 $\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

又由图可得二面角 $P-EC-D$ 为锐角,

所以二面角 $P-EC-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4 分

(2) 设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PC}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) , 则 $\overrightarrow{PM} = (-2\lambda, \sqrt{3}\lambda, -\sqrt{3}\lambda)$,

$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PM} = (1-2\lambda, \sqrt{3}\lambda, \sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$, $\overrightarrow{PE} = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$,6 分

所以 $|\cos \langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{PE} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{PE}|}{|\overrightarrow{DM}| |\overrightarrow{PE}|} = \frac{|6\lambda - 3|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10\lambda^2 - 10\lambda + 4}} = \frac{\sqrt{6}}{8}$,8 分

解得 $\lambda = \frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$, 所以存在点 M 为线段 PC 的三等分点.10 分

