

高三数学练习整理四 2020.5.14

班级_____ 学号_____ 姓名_____

要求：感悟提炼部分必须完成，可以是方法总结、解题关键词、易错点提醒等文字表述
题组一与圆有关的最值问题

已知点 D 为圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的弦 MN 的中点，点 A 的坐标 $(1,0)$ ，且 $\vec{AM} \cdot \vec{AN} = 1$ ，则

$\vec{OA} \cdot \vec{OD}$ 的最小值为_____ -1 _____

感悟提炼：

$$1.3\sqrt{2}, 2. \frac{\sqrt{13}+1}{2}, 3.8, 4. \left[0, \frac{12}{5}\right], 5. \left[\frac{2\sqrt{14}}{3}, 2\sqrt{2}\right]$$

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-4,0)$ ， $B(0,4)$ ，从直线 AB 上一点 P 向圆 $x^2 + y^2 = 4$ 引两条切线 PC ， PD ，切点分别为 C ， D 。设线段 CD 的中点为 M ，则线段 AM 长的最大值为_____。

已知正三角形 ABC 的边长为 2，点 P 为线段 AB 中垂线上任意一点， Q 为射线 AP 上一点，且满足 $\vec{AP} \cdot \vec{AQ} = 1$ ，则 $|\vec{CQ}|$ 的最大值为_____。

在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $C: x^2 + (y-3)^2 = 2$ ，点 A 是 x 轴上的一个动点， AP ， AQ 分别切圆 C 于 P ， Q 两点，则线段 PQ 长的取值范围为_____。

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A, B 都在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上，且 $AB = 2\sqrt{2}$ ，点 $P(t, 4-t)$ 则 $PA^2 + PB^2$ 的最小值为_____。

在平面直角坐标系 xOy 中，已知 MN 在圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 4$ 上运动，且 $MN = 2\sqrt{3}$ 。若直线 $l: kx - y + 3 = 0$ 上的任意一点 P 都满足 $PM^2 + PN^2 \geq 14$ ，则实数 k 的取值范围是_____。

题组二：数列单调性问题

14. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1, & \frac{n}{4} \notin \mathbf{N}^*, \\ a_n & \frac{n}{4} \in \mathbf{N}^*, \end{cases}$ 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{4n} \leq \lambda \cdot 2^{n+1}$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围是_____.

$$\lambda \geq \frac{33}{2}$$

感悟提炼:

(周末限时练习 2) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} - a_n = p \cdot 3^{n-1} - nq$, $n \in \mathbf{N}^*$, $p, q \in \mathbf{R}$.
若 $p=1$, 且 a_4 为数列 $\{a_n\}$ 的最小项, 求 q 的取值范围.

$$3 \leq q \leq \frac{27}{4}$$

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = -n + p$, 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^{n-5}$. 设 $c_n =$

$\begin{cases} a_n, & a_n \leq b_n, \\ b_n, & a_n > b_n, \end{cases}$ 若在数列 $\{c_n\}$ 中, $c_8 > c_n (n \in \mathbf{N}^*, n \neq 8)$, 则实数 p 的取值范围是_____.

$$12 \leq p \leq 17$$

题组三：和立体几何有关的应用题

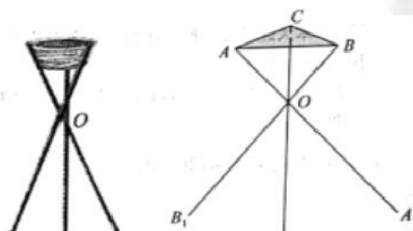
17. (本小题满分 14 分)

某厂根据市场需求开发三角花篮支架(如图). 上面为花篮, 支架由三根细钢管组成. 考虑到钢管的受力和花篮质量等因素, 设计支架应满足: ①三根细钢管长均为 1 米(粗细忽略不计), 且与地面所成的角均为 θ ($\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$); ②架面与架底平行, 且架面三角形 ABC 与架底三角形 $A_1B_1C_1$ 均为等边三角形; ③三根细钢管相交处的节点 O 分三根细钢管上、下两段之比均为 2:3. 定义: 架面与架底的距离为“支架高度”, 架底三角形 $A_1B_1C_1$ 的面积与“支架高度”的乘积为“支架需要空间”.

(1) 当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, 求“支架高度”.

(2) 求“支架需要空间”的最大值.

解: (1)

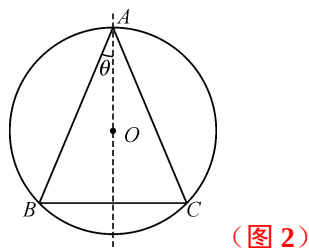
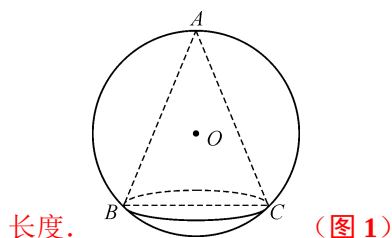


感悟提炼:

例 2、(2018 苏北四市期末) 某艺术品公司欲生产一款迎新春工艺礼品, 该礼品由玻璃球面和该球的内接圆锥组成, 圆锥的侧面用于艺术装饰, 如图 1, 为了便于设计, 可将该礼品看成是由圆 O 及其内接等腰三角形 ABC 绕底边 BC 上的高所在直线 AO 旋转 180° 而成, 如图 2, 已知圆 O 的半径为 10 cm , 设 $\angle BAO = \theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 圆锥的侧面积为 $S\text{ cm}^2$.

(1) 求 S 关于 θ 的函数关系式;

(2) 为了达到最佳观赏效果, 要求圆锥的侧面积 S 最大, 求 S 取得最大值时腰 AB 的



思路分析 (1) 母线长 l 是 OA 在 AB 上的射影的两倍, 可用 θ 表示. 底面半径 r 是 l 在底面上的射影, 可用 l 和 θ 表示. 从而 $S = \pi r l$ 可用 θ 表示;

(2) 求导数, 找导函数的零点, 列表确定极大值, 唯一的极大值也是最大值.

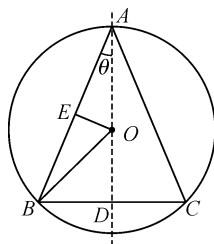
规范解答 (1) 设 AO 交 BC 于点 D , 过 O 作 $OE \perp AB$, 垂足为 E .

在 $\triangle AOE$ 中, $AE = 10 \cos \theta$, $AB = 2AE = 20 \cos \theta$. (2 分)

在 $\triangle ABD$ 中, $BD = AB \sin \theta = 20 \cos \theta \cdot \sin \theta$, (4 分)

所以 $S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 20 \sin \theta \cos \theta \cdot 20 \cos \theta$

$= 400\pi \sin \theta \cos^2 \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$. (6 分)



(2) 由(1)得 $S = 400\pi \sin \theta \cos^2 \theta = 400\pi (\sin \theta - \sin^3 \theta)$. (8 分)

令 $x = \sin \theta$ ($0 < x < 1$), 设 $f(x) = x - x^3$,

则 $f'(x) = 1 - 3x^2$, 由 $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0$ 得 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		极大值	

所以 $f(x)$ 在 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取得极大值, 也是最大值.

所以当 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 侧面积 S 取得最大值, (11 分)

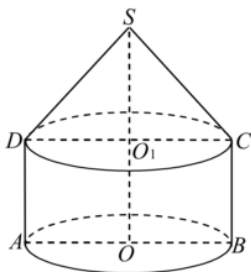
此时等腰三角形的腰长 $AB = 20 \cos \theta = 20 \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = 20 \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{20\sqrt{6}}{3} (\text{cm})$.

答：侧面积 S 取得最大值时，等腰三角形的腰 AB 的长度为 $\frac{20\sqrt{6}}{3} \text{cm}$. (14 分)

例 4、如图，某工厂根据生产需要制作一种下部是圆柱、上部是圆锥的封闭型组合体存储设备，该组合体总高度为 8 米，圆柱的底面半径为 4 米，圆柱的高不小于圆柱的底面半径. 已知制作圆柱侧面和底面的造价均为每平米 2 百元，制作圆锥侧面的造价为每平米 4 百元，设制作该存储设备的总费用为 y 百元.

(1) 设 $\angle SDO_1 = \theta \text{ (rad)}$ ，将 y 表示成 θ 的函数关系式；

(2) 求制作该存储设备总费用的最小值.



解析 (1) 因为 $SD = \frac{4}{\cos \theta}$, $h = 8 - 4 \tan \theta$.

所以 $y = 2S_{\text{底面}} + 2S_{\text{圆柱侧}} + 4S_{\text{圆锥侧}}$

$$= 32\pi + 2\pi \times 4 \times (8 - 4 \tan \theta) \times 2 + 4 \times 4 \times \pi \times \frac{4}{\cos \theta}$$

$$= 32\pi + 64\pi(2 - \tan \theta) + \frac{64\pi}{\cos \theta} = 160\pi + 64\pi \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}).$$

(2) 由 (1) 知 $y = 160\pi + 64\pi \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (0 < \theta \leq \frac{\pi}{4})$,

$$\text{设 } \varphi(\theta) = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}, \quad \varphi'(\theta) = \frac{\sin \theta - 1}{\cos^2 \theta},$$

因为 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$, 所以 $\varphi'(\theta) < 0$,

所以, $\varphi(\theta)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递减,

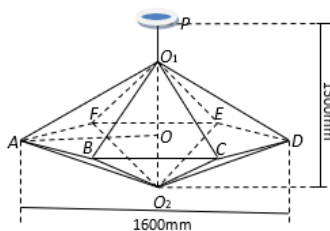
所以, 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, y 取到最小值 $(96 + 64\sqrt{2})\pi$.

感悟提炼:

例 5、(2017 苏州预测卷) 如图 1 所示为一种魔豆吊灯, 图 2 为该吊灯的框架结构图, 由正六棱锥 $O_1-ABCDEF$ 和 $O_2-ABCDEF$ 构成, 两个棱锥的侧棱长均相等, 且棱锥底面外接圆的直径为 1600mm, 底面中心为 O , 通过连接线及吸盘固定在天花板上, 使棱锥的底面呈水平状态, 下顶点 O_2 与天花板的距离为 1300mm, 所有的连接线都用特殊的金属条制成, 设金属条的总长为 y .

(1) 设 $\angle O_1AO = \theta$ (rad), 将 y 表示成 θ 的函数关系式, 并写出 θ 的范围;

(2) 请你设计 θ , 当角 θ 正弦值的大小是多少时, 金属条总长 y 最小.



解析 (1) 在直角 $\triangle OAO_1$ 中, $O_1A = \frac{800}{\cos \theta}$, $OO_1 = 800 \tan \theta$, $O_1P = 1300 - 1600 \tan \theta$,

由 $OO_1 = 800 \tan \theta > 0$, $O_1P = 1300 - 1600 \tan \theta > 0$, 所以 $0 < \tan \theta < \frac{13}{16}$,

所以 θ 的范围是 $0 < \theta < \alpha$, 其中 $\tan \alpha = \frac{13}{16}$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

从而有 $y = 12O_1A + 6AB + O_1P = \frac{12 \times 800}{\cos \theta} + 6 \times 800 + 1300 - 1600 \tan \theta$

$$= \frac{1600(6 - \sin \theta)}{\cos \theta} + 6100,$$

所以 $y = \frac{1600(6 - \sin \theta)}{\cos \theta} + 6100$ ($\tan \alpha = \frac{13}{16}$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$).

(2) 令 $g(\theta) = \frac{6 - \sin \theta}{\cos \theta}$, 所以 $g'(\theta) = \frac{6 \sin \theta - 1}{\cos^2 \theta}$,

令 $y' = 0$, 则 $\sin \theta = \frac{1}{6}$, 则 $\theta = \theta_0$ ($\tan \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{35}}$).

当 $\theta \in (0, \theta_0)$ 时, $y' < 0$; 当 $\theta \in (\theta_0, \alpha)$ 时, $y' > 0$.

函数 $g(\theta)$ 的单调性与 θ 关系列表如下:

θ	$(0, \theta_0)$	θ_0	(θ_0, α)
$g'(\theta)$		0	+
$g(\theta)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $\theta = \theta_0$, 其中 $\tan \theta_0 = \frac{\sqrt{35}}{35}$ 取得最小值.

答: 当角 θ 满足 $\sin \theta = \frac{1}{6}$ ($\tan \theta = \frac{\sqrt{35}}{35}$) 时, 金属条总长 y 最小.