

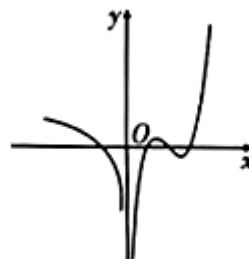
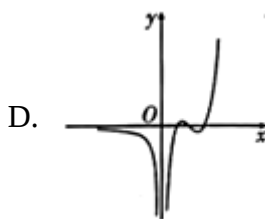
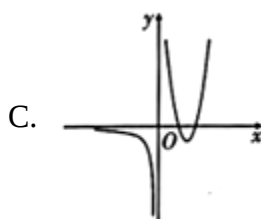
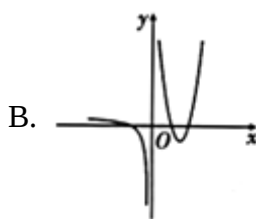
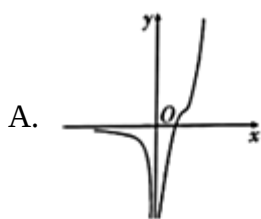
江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第二学期高二数学

周三练习 2

21.3.3

一、选择题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

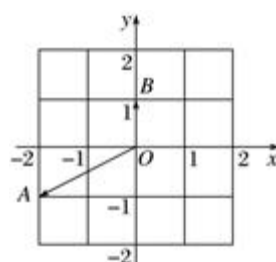
- 复数 z 满足 $z(1+i) = 1-i$ ，则 z 的虚部等于()
A. $-i$ B. -1 C. 0 D. 1
- 函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ 的单调递增区间为()
A. $(-1,1)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(0,1)$ D. $(1, +\infty)$
- 若 $z + 2\bar{z} = 3 - i$ ，则 $|z| =$ ()
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2
- 设函数 $f(x)$ 是其定义域内的可导函数，其函数图象如右图所示，则其导函数 $f'(x)$ 的图象可能是()



- 已知 $a \in \mathbb{R}$ ，设函数 $f(x) = ax - \ln x$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 l ，则 l 在 y 轴上的截距为()
A. $1-a$ B. 1 C. $a-1$ D. -1
- 设函数 $f(x) = a \ln x + bx^2$ ，若函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x$ ，则函数 $y = f(x)$ 的增区间为()
A. $(0,1)$ B. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ C. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ D. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

二、不定项选择题（本大题共 2 小题，共 10 分）

- 以下命题正确的是()
A. $a = 0$ 是 $z = a + bi$ 为纯虚数的必要不充分条件
B. 满足 $x^2 + 1 = 0$ 的 x 有且仅有 i
C. “在区间 (a, b) 内 $f'(x) > 0$ ” 是 “ $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递增” 的充分不必要条件
D. 已知 $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ ，则 $f'(x) = \frac{7}{8}x^{\frac{1}{8}}$
- 下列结论正确的是().
A. “ z_1, z_2 互为共轭复数” 是 “ $|z_1| = |z_2|$ ” 的充分不必要条件
B. 如图，在复平面内，若复数 z_1, z_2 对应的向量分别是 $\vec{OA}, \vec{OB}$ ，则复数 $z_1 + z_2$ 对应的点的坐标为 $(-2, 0)$
C. 若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax + 4$ 恰在 $[-1, 4]$ 上单调递减，则实数 a 的值为 4
D. 函数 $f(x) = \sin x$ 在 $x = \pi$ 处的切线方程为 $y = -x + \pi$



三、填空题（本大题共 4 小题，共 10.0 分）

9. i 是虚数单位，若 $\frac{2+ai}{1+i}$ 是纯虚数，则实数 a 的值为__.

10. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = x^2 + 3f'(1)x - f(1)$ ，则 $f'(1) =$ _____.

11. 在曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - \frac{1}{3}$ 的所有切线中，斜率最小的切线方程为_____.

12. 若曲线 $y = 2\sqrt{x}$ 与曲线 $y = ae^x$ 在公共点处有相同的切线，则实数 a 的值为_____.

四、解答题（本大题共 2 小题，共 36.0 分）

13. (1) 计算： $i^{100} - (\frac{1-i}{1+i})^6$ (i 为虚数单位)

(2) 设 $z \in \mathbb{C}$ ， $z + |\bar{z}| = 2 + i$ ，求 z

14. (1) 已知曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$ ，求曲线过点 $P(2,4)$ 的切线方程.

(2) 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足： $f(x) + f'(x) > 1$ ， $f(0) = 4$ ，求不等式 $e^x f(x) > e^x + 3$ 的解集.

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第二学期高二数学 周三练习 2

21.3.3

一、选择题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

1. 复数 z 满足 $z(1+i) = 1-i$ ，则 z 的虚部等于()

- A. $-i$ B. -1 C. 0 D. 1

【答案】B

【解析】解：∵复数 z 满足 $z(1+i) = 1-i$ ，

$$\therefore z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = -i,$$

∴ z 的虚部为 -1 .

故选：B.

推导出 $z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i$ ，由此能求出 z 的虚部.

本题考查复数的虚部的求法，考查复数的运算法则等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

2. 函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ 的单调递增区间为()

- A. $(-1,1)$ B. $(-\infty,1)$ C. $(0,1)$ D. $(1,+\infty)$

【答案】D

【解析】

解：函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$\text{令 } f'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x} > 0, \text{ 解得 } x > 1,$$

∴ 函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ 的单调递增区间是 $(1, +\infty)$.

故选 D.

3. 若 $z + 2\bar{z} = 3 - i$ ，则 $|z| = ()$

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

【答案】B

【解析】解：设 $z = a + bi$ ，则 $\bar{z} = a - bi$ ，

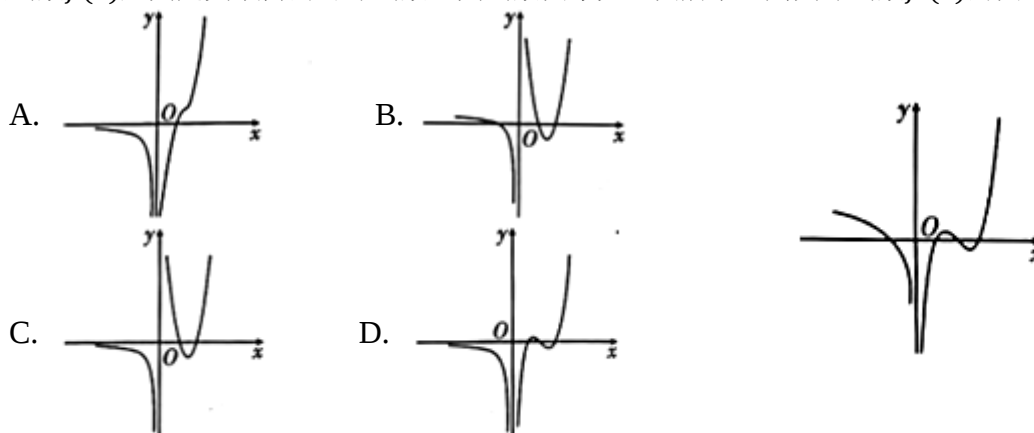
因为 $z + 2\bar{z} = 3 - i$ ，所以 $a + bi + 2(a - bi) = 3 - i$ ，

所以 $3a - bi = 3 - i$ ，所以 $3a = 3$ ， $-b = -1$ ，

所以 $a = 1$ ， $b = 1$ ，所以 $z = 1 + i$ ，故 $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

故选：B.

4. 设函数 $f(x)$ 是其定义域内的可导函数，其函数图象如右图所示，则其导函数 $f'(x)$ 的图象可能是()



【答案】C

【解答】

解：由函数 $f(x)$ 的图象知： $x < 0$ 时，单调递减， $f'(x) < 0$ ，排除 B；

又当 $x > 0$ 时，知 $x \in (0, x_1)$ ， $f(x)$ 单调递增， $x \in (x_1, x_2)$ ， $f(x)$ 单调递减， $x \in (x_2, +\infty)$ 时， $f(x)$ 单调递增，

所以 $x \in (0, x_1)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $x \in (x_1, x_2)$ 时， $f'(x) < 0$ ； $x \in (x_2, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ，排除 A，D，

故选 C.

5. 已知 $a \in R$, 设函数 $f(x) = ax - \ln x$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 l , 则 l 在 y 轴上的截距为 ()

- A. $1 - a$ B. 1 C. $a - 1$ D. -1

【答案】D

【解答】解: 函数 $f(x) = ax - \ln x$ 的导数为 $f'(x) = a + \frac{1}{x}$,

可得图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 $a + 1$,

且 $f(1) = a$,

则切线方程为 $y - a = (a + 1)(x - 1)$,

令 $x = 0$, 可得 $y = -1$,

故选: D.

求得 $f(x)$ 的导数, 可得切线的斜率, 切点, 由点斜式方程可得切线的方程, 令 $x = 0$, 计算可得 l 在 y 轴上的截距.

本题考查导数的运用: 求切线的方程, 考查直线方程的运用, 以及运算能力, 属于基础题.

6. 设函数 $f(x) = a \ln x + bx^2$, 若函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x$, 则函数 $y = f(x)$ 的增区间为 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ C. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ D. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

【答案】C

【解答】解: 函数定义域为 $(0, +\infty)$,

所以函数求导得, $f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx$,

因为函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x$, 所以 $a + 2b = 1$,

因为 $f(1) = 1$, 所以 $b = 1$, 所以 $a = -1$, 则 $f'(x) = \frac{-1+2x^2}{x}$,

令 $f'(x) = \frac{-1+2x^2}{x} > 0$, 所以 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (舍)

所以函数 $y = f(x)$ 的增区间为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. 故选 C.

三、不定项选择题 (本大题共 2 小题, 共 10 分)

7. 以下命题正确的是 ()

- A. $a = 0$ 是 $z = a + bi$ 为纯虚数的必要不充分条件
 B. 满足 $x^2 + 1 = 0$ 的 x 有且仅有 i
 C. “在区间 (a, b) 内 $f'(x) > 0$ ” 是 “ $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递增” 的充分不必要条件
 D. 已知 $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$, 则 $f'(x) = \frac{7}{8}x^{\frac{1}{8}}$

【答案】AC

【解答】解: 对于 A 选项, 若复数 $z = a + bi$ 为纯虚数, 则 $a = 0$ 且 $b \neq 0$, 所以, $a = 0$ 是 $z = a + bi$ 为纯虚数的必要不充分条件, A 选项正确;

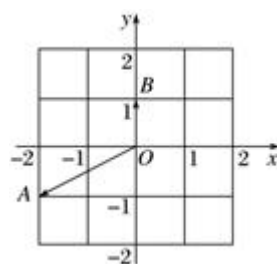
对于 B 选项, 解方程 $x^2 + 1 = 0$ 得 $x = \pm i$, B 选项错误;

对于 C 选项, 当 $x \in (a, b)$ 时, 若 $f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递增, 即 “在区间 (a, b) 内 $f'(x) > 0$ ” $\Rightarrow$ “ $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递增”. 反之, 取 $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $f'(x) \geq 0$, 此时, 函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递增, 即 “在区间 (a, b) 内 $f'(x) > 0$ ” $\nRightarrow$ “ $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递增”. 所以, “在区间 (a, b) 内 $f'(x) > 0$ ” 是 “ $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递增” 的充分不必要条件. C 选项正确;

对于 D 选项, $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = x^{\frac{7}{8}}$, $\therefore f'(x) = \frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$, D 选项错误. 故选: AC.

8. 下列结论正确的是 ().

- A. “ z_1, z_2 互为共轭复数” 是 “ $|z_1| = |z_2|$ ” 的充分不必要条件
 B. 如图, 在复平面内, 若复数 z_1, z_2 对应的向量分别是 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$, 则复数 $z_1 + z_2$ 对应的点的坐标为 $(-2, 0)$
 C. 若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax + 4$ 恰在 $[-1, 4]$ 上单调递减, 则实数 a 的值为 4
 D. 函数 $f(x) = \sin x$ 在 $x = \pi$ 处的切线方程为 $y = -x + \pi$



【答案】ABD

【解答】解：对于 A，设 $z_1 = a + bi (a, b \in R)$ ，则 $z_2 = a - bi$ ，所以 $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z_2|$ ，故充分性成立；
当 $z_1 = 1, z_2 = i$ ，此时 $|z_1| = |z_2|$ ，但 z_1, z_2 不互为共轭复数，故必要性不成立。

所以“ z_1, z_2 互为共轭复数”是“ $|z_1| = |z_2|$ ”的充分不必要条件。故 A 正确；

对于 B，由图可知 $\vec{OA} = (-2, -1), \vec{OB} = (0, 1)$ ，所以 $\vec{OA} + \vec{OB} = (-2, 0)$ ，故复数 $z_1 + z_2$ 对应的坐标为 $(-2, 0)$ 。
故 B 正确；

对于 C， $f'(x) = x^2 - 3x + a$ ，因为函数 $f(x)$ 恰在 $[-1, 4]$ 上单调递减，所以 $f'(x) \leq 0$ 的解集恰好是 $[-1, 4]$ ，
故 $-1, 4$ 是方程 $x^2 - 3x + a = 0$ 的两根，

所以 $a = (-1) \times 4 = -4$ ，故 C 错误；

对于 D，因为函数 $f(x) = \sin x$ ，所以 $f'(x) = \cos x$ ，所以在 $x = \pi$ 处切线斜率 $k = f'(\pi) = -1$ ，故切线方程
为 $y - 0 = -1(x - \pi)$ ，即 $y = -x + \pi$ ，故 D 正确。

故选 ABD。

三、填空题（本大题共 4 小题，共 10.0 分）

9. i 是虚数单位，若 $\frac{2+ai}{1+i}$ 是纯虚数，则实数 a 的值为 -2。

10. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = x^2 + 3f'(1)x - f(1)$ ，则 $f'(1) =$ -1。

11. 在曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - \frac{1}{3}$ 的所有切线中，斜率最小的切线方程为 $2x - y = 0$ 。

12. 若曲线 $y = 2\sqrt{x}$ 与曲线 $y = ae^x$ 在公共点处有相同的切线，则实数 a 的值为 $\frac{\sqrt{2}e}{e}$ 。

四、解答题（本大题共 2 小题，共 36.0 分）

13. (1) 计算： $i^{100} - (\frac{1-i}{1+i})^6$ (i 为虚数单位)

(2) 设 $z \in C, z + |\bar{z}| = 2 + i$ ，求 z

解：(1) $i^{100} - (\frac{1-i}{1+i})^6 = (i^4)^{25} - [(\frac{1-i}{1+i})^2]^3 = 1 - (-1)^3 = 2$ ；

(2) 设 $z = a + bi (a, b \in R)$ ，

则 $\bar{z} = a - bi, z + |\bar{z}| = 2 + i$ ，即为 $a + \sqrt{a^2 + b^2} + bi = 2 + i$ ，

可得 $b = 1, a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2$ ，

解得 $a = \frac{3}{4}, b = 1$ ，则 $z = \frac{3}{4} + i$

14. (1) 已知曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$ ，求曲线过点 $P(2, 4)$ 的切线方程。

(2) 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足： $f(x) + f'(x) > 1, f(0) = 4$ ，求不等式 $e^x f(x) > e^x + 3$ 的解集。

【答案】解：(1) $\because P(2, 4)$ 在 $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$ 上，又 $y' = x^2$ ， $\therefore$ 斜率 $k = 2^2 = 4$ 。

$\therefore$ 所求直线方程为 $y - 4 = 4(x - 2), 4x - y - 4 = 0$ 。

当切点不是点 P 时，设切点为 (x_1, y_1) ，根据切线过点 P ，可得： $x_1^2 = \frac{y_1 - 4}{x_1 - 2}$

又 $y_1 = \frac{1}{3}x_1^3 + \frac{4}{3}$ ，可解出 $x_1 = -1, y_1 = 1$ (舍去 $(2, 4)$)，

所以切线方程为 $y - 1 = x + 1$ 即切线方程为 $y = x + 2$

故切线方程为： $4x - y - 4 = 0$ 或 $x - y + 2 = 0$ 。

(2) 设 $g(x) = e^x f(x) - e^x, (x \in R)$ ，则 $g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) - e^x = e^x [f(x) + f'(x) - 1]$ ，

$\because f(x) + f'(x) > 1, \therefore f(x) + f'(x) - 1 > 0, \therefore g'(x) > 0, \therefore y = g(x)$ 在定义域上单调递增，

$\because e^x f(x) > e^x + 3, \therefore g(x) > 3$ ，

又 $\because g(0) = e^0 f(0) - e^0 = 4 - 1 = 3, \therefore g(x) > g(0), \therefore x > 0$ 。

$\therefore$ 不等式 $e^x f(x) > e^x + 3$ 的解集为 $(0, +\infty)$