排列组合的常见题型及其解法

排列、组合的概念具有广泛的实际意义，解决排列、组合问题，关键要搞清楚是否与元素的顺序有关。复杂的排列、组合问题往往是对元素或位置进行限制，因此掌握一些基本的排列、组合问题的类型与解法对学好这部分知识很重要。

一. 特殊元素（位置）用优先法

把有限制条件的元素（位置）称为特殊元素（位置），对于这类问题一般采取特殊元素（位置）优先安排的方法。

例 1. 6 人站成一横排，其中甲不站左端也不站右端，有多少种不同站法？

分析：解有限制条件的元素（位置）这类问题常采取特殊元素（位置）优先安排的方法。

解法 1：（元素分析法）因为甲不能站左右两端，故第一步先让甲排在左右两端之间的任一位置上，有 A_4^1 种站法；第二步再让其余的 5 人站在其他 5 个位置上，有 A_5^5 种站法，故站法共有：$A_4^1 \cdot A_5^5$＝480（种）

解法 2：（位置分析法）因为左右两端不站甲，故第一步先从甲以外的 5 个人中任选两人站在左右两端，有 A_5^2 种；第二步再让剩余的 4 个人（含甲）站在中间 4 个位置，有 A_4^4 种，故站法共有：$A_5^2 \cdot A_4^4 = 480$（种）

二. 相邻问题用捆绑法

对于要求某几个元素必须排在一起的问题，可用“捆绑法”：即将这几个元素看作一个整体，视为一个元素，与其他元素进行排列，然后相邻元素内部再进行排列。

例 2. 5 个男生和 3 个女生排成一排，3 个女生必须排在一起，有多少种不同排法？

解：把 3 个女生视为一个元素，与 5 个男生进行排列，共有 A_6^6 种，然后女生内部再进行排列，有 A_3^3 种，所以排法共有：$A_6^6 \cdot A_3^3 = 4320$（种）。

三. 相离问题用插空法

元素相离（即不相邻）问题，可以先将其他元素排好，然后再将不相邻的元素插入已排好的元素位置之间和两端的空中。

例 3. 7 人排成一排，甲、乙、丙 3 人互不相邻有多少种排法？

解：先将其余 4 人排成一排，有 A_4^4 种，再往 4 人之间及两端的 5 个空位中让甲、乙、丙插入，有 A_5^3 种，所以排法共有：$A_4^4 \cdot A_5^3 = 1440$（种）

四. 定序问题用除法

对于在排列中，当某些元素次序一定时，可用此法。解题方法是：先将 n 个元素进行全排列有 A_n^n 种，$m(m \le n)$ 个元素的全排列有 A_m^m 种，由于要求 m 个元素次序一定，因此只能取其中的某一种排法，可以利用除法起到调序的作用，即若 n 个元素排成一列，其中 m 个元素次序一定，则有 $\frac{A_n^n}{A_m^m}$ 种排列方法。

例 4. 由数字 0、1、2、3、4、5 组成没有重复数字的六位数，其中个位数字小于十位数字的六位数有多少个？

解：不考虑限制条件，组成的六位数有 $A_5^1 \cdot A_5^5$ 种，其中个位与十位上的数字一定，所以所求的六位数有：

$$\frac{A_5^1 \cdot A_5^5}{A_2^2} = 300\text{（个）}$$

五. 分排问题用直排法

对于把几个元素分成若干排的排列问题，若没有其他特殊要求，可采取统一成一排的方法求解。

例 5. 9 个人坐成三排，第一排 2 人，第二排 3 人，第三排 4 人，则不同的坐法共有多少种？

解：9 个人可以在三排中随意就坐，无其他限制条件，所以三排可以看作一排来处理，不同的坐标共有 A_9^9 种。

六. 复杂问题用排除法

对于某些比较复杂的或抽象的排列问题，可以采用转化思想，从问题的反面去考虑，先求出无限制条件的方法种数，然后去掉不符合条件的方法种数。在应

用此法时要注意做到不重不漏。

例 6. 四面体的顶点和各棱中点共有 10 个点，取其中 4 个不共面的点，则不同的取法共有（　　）

A. 150 种　　B. 147 种　　C. 144 种　　D. 141 种

解：从 10 个点中任取 4 个点有 C_{10}^4 种取法，其中 4 点共面的情况有三类。第一类，取出的 4 个点位于四面体的同一个面内，有 $4C_6^4$ 种；第二类，取任一条棱上的 3 个点及该棱对棱的中点，这 4 点共面，有 6 种；第三类，由中位线构成的平行四边形（其两组对边分别平行于四面体相对的两条棱），它的 4 个点共面，有 3 种。以上三类情况不合要求应减掉，所以不同的取法共有：$C_{10}^4-4C_6^4-6-3=141$（种）。

七. 多元问题用分类法

按题目条件，把符合条件的排列、组合问题分成互不重复的若干类，分别计算，最后计算总数。

例 7. 已知直线 $ax+by+c=0$ 中的 a，b，c 是取自集合{－3，－2，－1，0，1，2，3}中的 3 个不同的元素，并且该直线的倾斜角为锐角，求符合这些条件的直线的条数。

解：设倾斜角为 θ，由 θ 为锐角，得 $\tan\theta=-\dfrac{a}{b}>0$，即 a，b 异号。

（1）若 c＝0，a，b 各有 3 种取法，排除 2 个重复（$3x-3y=0$，$2x-2y=0$，$x-y=0$），故有：3×3－2＝7（条）。

（2）若 $c\neq 0$，a 有 3 种取法，b 有 3 种取法，而同时 c 还有 4 种取法，且其中任意两条直线均不相同，故这样的直线有：3×3×4＝36（条）。

从而符合要求的直线共有：7＋36＝43（条）

八. 排列、组合综合问题用先选后排的策略

处理排列、组合综合性问题一般是先选元素，后排列。

例 8. 将 4 名教师分派到 3 所中学任教，每所中学至少 1 名教师，则不同的分派方案共有多少种？

解：可分两步进行：第一步先将 4 名教师分为三组（1，1，2），（2，1，1），

（1，2，1），共有：$\frac{C_4^2\cdot C_2^1\cdot C_1^1}{A_2^2}=6$（种），第二步将这三组教师分派到 3 种中学任教有 A_3^3 种方法。由分步计数原理得不同的分派方案共有：$\frac{C_4^2\cdot C_2^1\cdot C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3=36$（种）。因此共有 36 种方案。

九. 隔板模型法

常用于解决整数分解型排列、组合的问题。

例 9. 有 10 个三好学生名额，分配到 6 个班，每班至少 1 个名额，共有多少种不同的分配方案？

解：6 个班，可用 5 个隔板，将 10 个名额并排成一排，名额之间有 9 个空，将 5 个隔板插入 9 个空，每一种插法，对应一种分配方案，故方案有：$C_9^5=126$（种）