
高三数学练习整理二 2020.4.17

班级_____ 学号_____ 姓名_____

要求：感悟提炼部分必须完成，可以是方法总结、解题关键词、易错点提醒等文字表述

一. 函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的研究与应用

⊗ 1、研究函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的图像与性质.

感悟提炼:

⊗ 2、求 $e^3, 3^e, e^\pi, \pi^e, 3^\pi, \pi^3$ 这 6 个数的最大数与最小数.

感悟提炼:

⊗ 3、已知函数 $y = a^x (a > 1)$ 的定义域与值域均为 $[m, n]$, ($m < n$), 则实数 a 的取值范围是_____.

感悟提炼:

⊗ 4、事实证明, 存在正实数 $a, b (a < b)$, 使得 $a^b = b^a$, 请你写出所有符合条件的 a 的取值范围.

感悟提炼:

⊗ 5、对于函数 $y = f(x)$ ，若存在 $[a, b]$ ，当 $x \in [a, b]$ 时的值域为 $[ka, kb]$, ($k > 0$)，则称 $y = f(x)$ 为“ k 倍值函数”。若 $f(x) = \ln x + x$ 是“ k 倍值函数”，则实数 k 的取值范围是_____.

感悟提炼:

⊗ 6、若不等式 $e^{\frac{x}{a}} > x$ 对 $\forall x \in R$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

感悟提炼:

⊗ 7、已知 $\frac{\ln x}{x} = x^2 - 2ex + a$ 有实数解，则实数 a 的取值范围是_____.

感悟提炼:

⊗ 8、已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{x - e \ln x} - 4e \ln x$ 与 $g(x) = tx$ 的图像有 4 个不同的交点，则实数 t 的取值范围是_____.

感悟提炼:

二. 导数中涉及“ $\ln x, e^x$ ”的优化模型的应用

⊗₁、当 $x > 0$ 时, 求证: $\frac{e^x}{x} > x$.

感悟提炼:

⊗₂、设 L 为曲线 $C: y = \frac{\ln x}{x}$ 在点 $(1,0)$ 处的切线.

(1) 求 L 的方程; (2) 证明: 除切点 $(1,0)$ 外, 曲线 C 在直线 L 的下方.

感悟提炼:

⊗ 3、已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.

- (1) 若 $a=1$, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$;
- (2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点, 求实数 a .

感悟提炼:

⊗ 4、已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + 2x$, $g(x) = \ln x$. 是否存在正实数 a , 使得函数 $F(x) = \frac{g(x)}{x} - f'(x) + 2a + 1$ 在区间 $(\frac{1}{e}, e)$ 内存在 2 个不同的零点? 若存在, 请求出 a 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

感悟提炼:

三. 关于不等式整数解模型的应用

⊗₁、设实数 $m > 0$ ，若不等式 $me^{mx} - \ln x < 0$ 恰好有三个整数解，则实数 m 的取值范围为_____.

感悟提炼:

⊗₂、关于 x 的不等式 $\ln x + kx > 0$ 恰有三个整数解，则实数 k 的取值范围是_____.

感悟提炼:

⊗ 3、设函数 $f(x) = e^x(2x-1) - ax + a$ ，其中 $a < 1$ ，若存在唯一的整数 x_0 ，使得 $f(x_0) < 0$ ，则实数 a 的取值范围是_____.

感悟提炼:

⊗ 4、函数 $f(x) = e^x(x-1)$ ，若关于 x 的不等式 $f^2(x) - (2a+1)f(x) + a^2 + a \leq 0$ 有且仅有两个不同的整数解，则实数 a 的取值范围是_____.

感悟提炼: