江苏省仪征中学2020届高考考前数学热身练 1

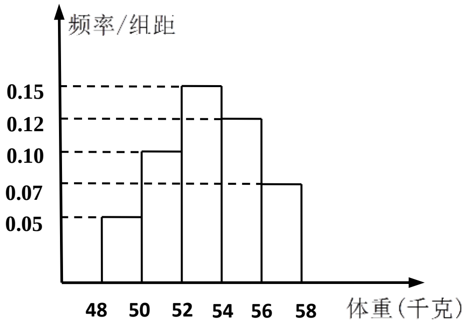
班级________ 姓名____________ 学号________ 日期________ 评价________

一、填空题：

1. 已知集合 $A=\{-3,-1,1,3\}$， $B=\{x\,|\,x^2-2x-3=0\}$，则 $A\cap B=$_________.

2. 已知复数 z 满足 $(z-2)\mathrm{i}=4$，其中 i 是虚数单位，则 z 的实部为___________.

3. 某中学为了了解高三年级女生的体重（单位：千克）情况，从中随机抽测了 100 名女生的体重，所得数据均在区间 $[48,58]$ 中，其频率分布直方图如图所示，则在抽测的 100 名女生中，体重在区间 $[50,56]$ 的女生数为______.



（第 3 题）

```
Read  x
If  x≥2  Then
   y ← x − 6
Else
   y ← 2/(3 − x) − 8
End  If
Print  y
```

（第 4 题）

4. 一个算法的伪代码如图所示，执行此算法，若输出的值为 -7，则输入的 x 的值为____.

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 上一点 M 到它的一个焦点的距离等于 1，则点 M 到另一个焦点的距离为___________.

6. 已知区域 $A=\{(x,\ y)\,|\,|x|\leqslant 2,|y|\leqslant 2\}$ 和 $B=\{(x,\ y)\,|\,x>0,\ y>0,\ x+y\leqslant 2\}$．若在区域 A 内随机取一点，则该点恰好落在区域 B 内的概率为_________.

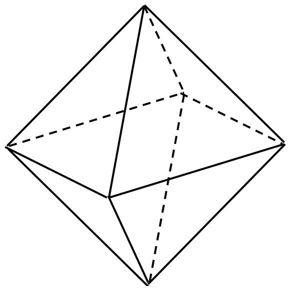
7. 若实数 x，y 满足 $x+3y=4$，则 2^x+8^y 的最小值为__________.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}-a_n}=2$，且 $a_1=\dfrac{1}{9}$，则 a_6 的值为__________.

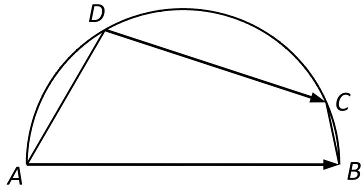
9. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 3 的奇函数，且 $f(-2)=2f(8)+1$，则 $f(2020)$ 的值为_________.

10. 已知柏拉图多面体是指每个面都是全等的正多边形构成的凸多面体．著名数学家欧拉研究并证明了多面体的顶点数（V）、棱数（E）、面数 (F) 之间存在如下关系：$V+F-E=2$．利用这个公式，可以证明柏拉图多面体只有 5 种，分别是正四面体、

正六面体（正方体）、正八面体、正十二面体和正二十面体．若棱长相等的正六面体和正八面体（如图）的外接球的表面积分别为 S_1，S_2，则 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的值为______________．



（第 10 题）



（第 12 题）

11．在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 M 经过直线 l：$x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 与圆 C：$x^2+y^2=4$ 的两个交点．当圆 M 的面积最小时，圆 M 的标准方程为________________________．

12．如图，四边形 $ABCD$ 是以 AB 为直径的圆的内接四边形．若 AB=2，AD=1，则 $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是_______________．

13．已知函数 $f(x)=\begin{cases}3x, & x<0,\\ x^2-2x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则函数 $y=f(f(x)-2x+4)$ 的不同零点的个数为______．

14．已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，且 $GA\perp GC$．若 $\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan C}=1$，则 $\tan B$ 的值为______．

二、解答题：

1.已知函数 $f(x)=2\cos^2(x+\dfrac{\pi}{4})+\cos(2x+\dfrac{\pi}{6})$，$x\in\mathbf{R}$．

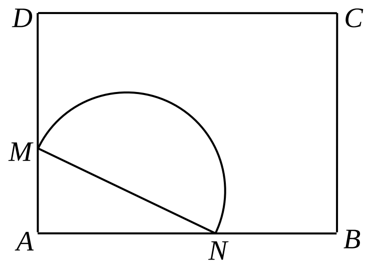
（1）求 $f(x)$ 的最小值；

（2）在 $\triangle ABC$ 中，$0<A<\dfrac{\pi}{3}$，且 $f(A)=-\dfrac{1}{2}$．若 $AC=2$，$BC=\sqrt{2}$，求角 B 的大小．

2．如图，在市中心有一矩形空地 $ABCD$，AB=100 m，AD=75 m．市政府欲将它改造成绿化景观带，具体方案如下：在边 AD，AB 上分别取点 M，N，在三角形 AMN 内建造假山，在以 MN 为直径的半圆内建造喷泉，其余区域栽种各种观赏类植物．

（1）若假山区域面积为 400 m^2，求喷泉区域面积的最小值；

（2）若 MN=100 m，求假山区域面积的最大值．

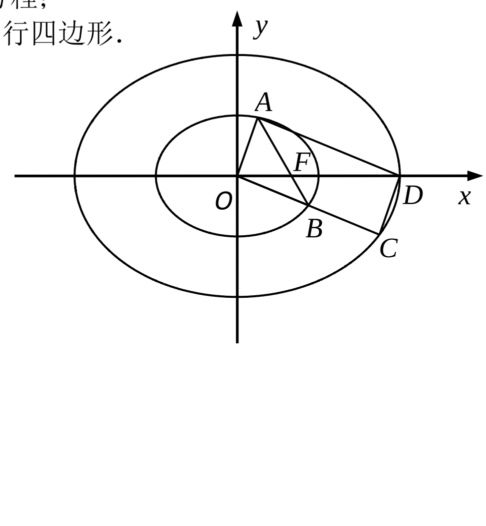


3．在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 与 C_2：$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<6)$ 的离心率相等．椭圆 C_1 的右焦点为 F，过点 F 的直线与椭圆 C_1 交于 A，B 两点，射线 OB 与椭圆 C_2 交于点 C．椭圆 C_2 的右顶点为 D．

（1）求椭圆 C_2 的标准方程；

（2）若 $\triangle ABO$ 的面积为 $\sqrt{10}$，求直线 AB 的方程；

（3）若 $AF=2BF$，求证：四边形 $AOCD$ 是平行四边形．



4．已知数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和为S_n， $b_n=\dfrac{S_n}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$．若$\left\{b_n\right\}$是公差不为 0 的等差数列，且$b_2b_7=b_{11}$．

（1）求数列$\left\{b_n\right\}$的通项公式；

（2）证明：数列$\left\{a_n\right\}$是等差数列.

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分．

1． 已知集合 $A=\{-3,-1,1,3\}$， $B=\{x\,|\,x^2-2x-3=0\}$，则 $A\cap B=$ ▲ ．

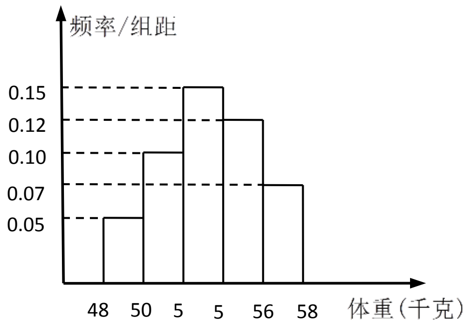
【答案】$\{-1,3\}$

2． 已知复数 z 满足 $(z-2)\mathrm{i}=4$，其中 i 是虚数单位，则 z 的实部为 ▲ ．

【答案】2

3． 某中学为了了解高三年级女生的体重（单位：千克）情况，从中随机抽测了 100 名女生的体重，所得数据均在区间 $[48,58]$ 中，其频率分布直方图如图所示，则在抽测的 100 名女生中，体重在区间 $[50,56]$ 的女生数为 ▲ ．

【答案】75



（第 3 题）

```
Read  x
If  x≥2  Then
    y ← x − 6
Else
    y ← 2/(3 − x) − 8
End  If
Print  y
```

（第 4 题）

4． 一个算法的伪代码如图所示，执行此算法，若输出的值为 -7，则输入的 x 的值为 ▲ ．

【答案】1

5． 在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 上一点 M 到它的一个焦点的距离等于 1，则点 M 到另一个焦点的距离为 ▲ ．

【答案】17

6． 已知区域 $A=\{(x,\ y)\,\big|\,|x|\leqslant 2,|y|\leqslant 2\}$ 和 $B=\{(x,\ y)\,|\,x>0,\ y>0,\ x+y\leqslant 2\}$．若在区域 A 内随机取一点，则该点恰好落在区域 B 内的概率为 ▲ ．

【答案】$\dfrac{1}{8}$

7． 若实数 $x,\ y$ 满足 $x+3y=4$，则 2^x+8^y 的最小值为 ▲ ．

【答案】8

8. 已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$\dfrac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}-a_n}=2$，且$a_1=\dfrac{1}{9}$，则$a_6$的值为__▲__.

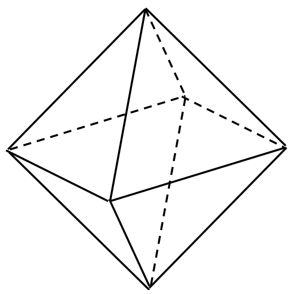
【答案】27

9. 已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的周期为3的奇函数，且$f(-2)=2f(8)+1$，则$f(2020)$的值为__▲__.

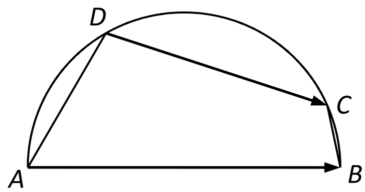
【答案】$\dfrac{1}{3}$

10. 已知柏拉图多面体是指每个面都是全等的正多边形构成的凸多面体．著名数学家欧拉研究并证明了多面体的顶点数（V）、棱数（E）、面数(F)之间存在如下关系：$V+F-E=2$．利用这个公式，可以证明柏拉图多面体只有 5 种，分别是正四面体、正六面体（正方体）、正八面体、正十二面体和正二十面体．若棱长相等的正六面体和正八面体（如图）的外接球的表面积分别为S_1，S_2，则$\dfrac{S_1}{S_2}$的值为__▲__.

【答案】$\dfrac{3}{2}$



（第 10 题）



（第 12 题）

11. 在平面直角坐标系xOy中，已知圆M经过直线l：$x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$与圆C：$x^2+y^2=4$的两个交点．当圆M的面积最小时，圆M的标准方程为__▲__.

【答案】$(x+\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2+(y-\dfrac{3}{2})^2=1$

12. 如图，四边形$ABCD$是以AB为直径的圆的内接四边形．若AB=2，AD=1，则$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$的取值范围是__▲__.

【答案】$(0,3)$

13. 已知函数$f(x)=\begin{cases}3x, & x<0,\\ x^2-2x, & x\geqslant 0,\end{cases}$则函数$y=f(f(x)-2x+4)$的不同零点的个数为__▲__.

【答案】5

14．已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，且 $GA\perp GC$．若 $\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=1$，则 $\tan B$ 的值为__▲__．

【答案】$\frac{1}{2}$

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．

1．已知函数 $f(x)=2\cos^2(x+\frac{\pi}{4})+\cos(2x+\frac{\pi}{6})$，$x\in\mathbf{R}$．

（1）求 $f(x)$ 的最小值；

（2）在 $\triangle ABC$ 中，$0<A<\frac{\pi}{3}$，且 $f(A)=-\frac{1}{2}$．若 $AC=2$，$BC=\sqrt{2}$，求角 B 的大小．

【解】（1）$f(x)=2\cos^2(x+\frac{\pi}{4})+\cos(2x+\frac{\pi}{6})$

$=1+\cos(2x+\frac{\pi}{2})+\cos 2x\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{6}$ …… 2 分

$=1-\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x$

$=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{3}{2}\sin 2x$

$=1+\sqrt{3}\cos(2x+\frac{\pi}{3})$． …… 5 分

因为当 $x=k\pi+\frac{\pi}{3}$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ 的最小值为 -1，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $1-\sqrt{3}$． …… 7 分

（2）由（1）知，$f(A)=1+\sqrt{3}\cos(2A+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$，即 $\cos(2A+\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$． …… 9 分

因为 $0<A<\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{3}<2A+\frac{\pi}{3}<\pi$，

所以 $2A+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$，即 $A=\frac{\pi}{4}$． …… 11 分

在 $\triangle ABC$ 中，因为 $AC=2$，$BC=\sqrt{2}$，

由正弦定理 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$，得 $\frac{2}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}$，

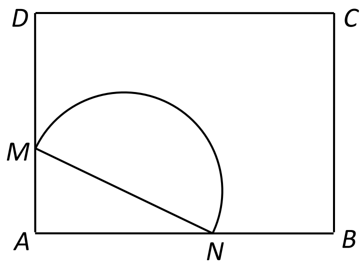
所以 $\sin B=1$.

因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{2}$. …… 14 分

2．如图，在市中心有一矩形空地 *ABCD*，*AB*=100 m，*AD*=75 m．市政府欲将它改造成绿化景观带，具体方案如下：在边 *AD*，*AB* 上分别取点 *M*，*N*，在三角形 *AMN* 内建造假山，在以 *MN* 为直径的半圆内建造喷泉，其余区域栽种各种观赏类植物．

（1）若假山区域面积为 400 m^2，求喷泉区域面积的最小值；

（2）若 *MN*=100 m，求假山区域面积的最大值．



【解】方法一：

（1）设 $\angle ANM=\theta$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，半圆的直径 $MN=2r$，半圆的圆心为 O．

在直角三角形 *AMN* 中，$\angle MAN=\frac{\pi}{2}$，所以 $AM=2r\sin\theta$，$AN=2r\cos\theta$．

因为假山区域面积为 400 m^2，

所以 $\frac{1}{2}AM\cdot AN=\frac{1}{2}\times 2r\sin\theta\times 2r\cos\theta=r^2\sin 2\theta=400$， …… 2 分

所以 $r^2=\frac{400}{\sin 2\theta}$，

所以喷泉区域面积 $S_{喷泉}=\frac{\pi}{2}r^2=\frac{200\pi}{\sin 2\theta}\geqslant 200\pi$，

当且仅当 $\sin 2\theta=1$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时取等号．此时 $r=20$． …… 5 分

因为点 O 到 CD 的距离 $d_1=AD-\frac{1}{2}AM$，点 O 到 BC 的距离 $d_2=AB-\frac{1}{2}AN$，

所以 $d_1=75-r\sin\theta=75-10\sqrt{2}>20=r$，即 $d_1>r$，

$d_2=100-r\cos\theta=100-10\sqrt{2}>20=r$，即 $d_2>r$．

所以以 *MN* 为直径的半圆区域一定在矩形广场内．

所以当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$S_{喷泉}$ 取得最小值 200π m^2．

答：喷泉区域面积的最小值为 200π m^2． …… 7 分

（2）由（1）知，若 MN=100 m，

则 $2r$=100， AM=100sinϑ，AN=100cosϑ.

所以点 O 到 CD 的距离 d_1=75－$r$sinϑ=75－50sinϑ，点 O 到 BC 的距离 d_2=100－50cosϑ，

因为以 MN 为直径的半圆区域在矩形广场内，

所以$\begin{cases} d_1 \geqslant r, \\ d_2 \geqslant r, \end{cases}$即$\begin{cases} 75-50\sin\theta \geqslant 50, \\ 100-50\cos\theta \geqslant 50, \end{cases}$

所以$\sin\theta \leqslant \dfrac{1}{2}$.

又因为$\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right]$. …… 11 分

所以假山区域面积 $S_{假山}=\dfrac{1}{2}AM \cdot AN=\dfrac{1}{2}\times 100\sin\vartheta \times 100\cos\vartheta=2500\sin 2\vartheta$，

因为$\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right]$，所以$2\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right]$，

所以当$\theta = \dfrac{\pi}{6}$时，假山区域面积的最大值为 $1250\sqrt{3}$ m^2.

答：假山区域面积的最大值为 $1250\sqrt{3}$ m^2. …… 14 分

方法二：

（1）设 $AM=x$ m，$AN=y$ m，半圆的直径 $2r$，半圆的圆心为 O.

在直角三角形 AMN 中，$\angle MAN=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $MN=2r=\sqrt{x^2+y^2}$.

因为假山区域面积为 400 m^2，

所以$\dfrac{1}{2}AM \cdot AN=\dfrac{1}{2}xy=400$，所以 $xy=800$， …… 2 分

所以喷泉区域面积 $S_{喷泉}=\dfrac{\pi}{2}(\dfrac{MN}{2})^2=\dfrac{\pi}{8}(x^2+y^2) \geqslant \dfrac{\pi}{8}\cdot 2xy=200\pi$，

当且仅当 $x=y=20\sqrt{2}$ 时，取等号．此时 r =20. …… 5 分

因为点 O 到 CD 的距离 $d_1=AD-\dfrac{1}{2}AM$，点 O 到 BC 的距离 $d_2=AB-\dfrac{1}{2}AN$，

所以 $d_1=75-\dfrac{x}{2}=75-10\sqrt{2}>20=r$，即 $d_1>r$，

d_2=100－$\frac{y}{2}$=50－10$\sqrt{2}$＞20=r，即 d_2＞r.

所以以 MN 为直径的半圆区域一定在矩形广场内.

所以当 $x = y = 20\sqrt{2}$ 时，$S_{喷泉}$取得最小值 200π m².

答：喷泉区域面积的最小值为 200π m². …… 7 分

（2）由（1）知，若 MN=100 m，则 $x^2 + y^2 = 10000$.

所以点 O 到 CD 的距离 $d_1 = 75 - \frac{x}{2}$.

因为以 MN 为直径的半圆区域在矩形广场内，

所以 d_1≥r，即 $75 - \frac{x}{2} \geqslant 50$，所以 $x \leqslant 50$，

注意到，在边 AD，AB 上分别取点 M，N，构成△AMN，

所以 $0 < x \leqslant 50$. …… 9 分

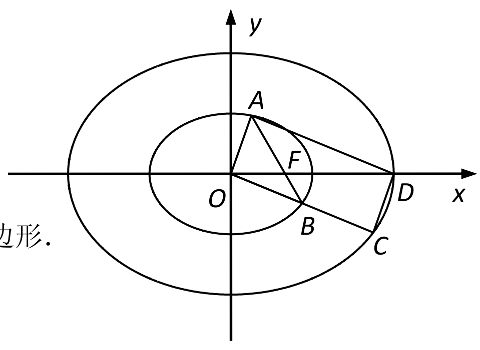
所以假山区域面积 $S_{假山}=\frac{1}{2}AM \cdot AN=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x\sqrt{10000 - x^2}$ …… 11 分

$$= \frac{1}{2}\sqrt{10000x^2 - x^4} = \frac{1}{2}\sqrt{-(x^2 - 5000)^2 + 25000000},$$

所以当 $x = 50$ 时，假山区域面积取得最大值为 $1250\sqrt{3}$ m².

答：假山区域面积的最大值为 $1250\sqrt{3}$ m². …… 14 分

3．在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C_1：$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 与 C_2：$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{b^2} = 1(0 < b < 6)$ 的离心率相等．椭圆 C_1 的右焦点为 F，过点 F 的直线与椭圆 C_1 交于 A，B 两点，射线 OB 与椭圆 C_2 交于点 C．椭圆 C_2 的右顶点为 D.



（1）求椭圆 C_2 的标准方程；

（2）若△ABO 的面积为 $\sqrt{10}$，求直线 AB 的方程；

（3）若 $AF = 2BF$，求证：四边形 $AOCD$ 是平行四边形.

【解】（1）由题意知，椭圆 C_1 的长轴长 $2a_1 = 6$，短轴长 $2b_1 = 2\sqrt{5}$，焦距 $2c_1 = 2\sqrt{a_1^2 - b_1^2} = 4$，

椭圆 C_2 的长轴长 $2a_2 = 12$，短轴长 $2b$，焦距 $2c_2 = 2\sqrt{36 - b^2}$.

因为椭圆 C_1 与 C_2 的离心率相等， 所以 $\frac{c_1}{a_1}=\frac{c_2}{a_2}$，即 $\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{36-b^2}}{6}$， …… 2 分

因为 $0<b<6$，所以 $b^2=20$，

所以椭圆 C_2 的标准方程为 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. …… 3 分

（2）因为椭圆 C_1 右焦点为 $F(2,0)$，且 A,O,B 三点不共线，

设直线 AB 的方程为 $x=my+2$，联立 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$，

消 x 得，$(5m^2+9)y^2+20my-25=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\Delta=(20m)^2+100(5m^2+9)>0$，

所以 $y_{1,2}=\frac{-20m\pm\sqrt{(20m)^2-4(5m^2+9)\times(-25)}}{2(5m^2+9)}=\frac{-20m\pm30\sqrt{m^2+1}}{2(5m^2+9)}$，

即 $y_1+y_2=-\frac{20m}{5m^2+9}$，$y_1y_2=\frac{-25}{5m^2+9}$.

（方法一）

因为 $S_{\Delta ABO}=S_{\Delta AOF}+S_{\Delta BOF}=\frac{1}{2}OF|y_1|+\frac{1}{2}OF|y_2|=\frac{1}{2}OF|y_1-y_2|=|y_1-y_2|$ 5 分

$$=\sqrt{(y_1+y_2{}^2-4y_1y_2}=\sqrt{(\frac{20m}{5m^2+9})^2+\frac{100}{5m^2+9}}=\sqrt{10},$$

化简得 $25m^4=9$，所以 $m=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$，

所以直线 AB 的方程为 $x=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}y+2$， 即 $5x\pm\sqrt{15}y-10=0$. …… 8 分

（方法二）

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1+\frac{(x_1-x_2)^2}{(y_1-y_2)^2})}|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|.$$

因为点 D 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}$，

所以 $S_{\Delta ABO}=\frac{1}{2}AB\cdot d=|y_1-y_2|$. …… 5 分

以下同方法一.

（3）（方法一）因为 $AF=2BF$，所以 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$.

因为 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$F(2,0)$，所以 $(2-x_1,-y_1)=2(x_2-2,y_2)$，

所以 $\begin{cases}x_1=6-2x_2,\\ y_1=-2y_2.\end{cases}$ …… 10 分

因为 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 上，

所以 $\begin{cases}\dfrac{x_1^{\ 2}}{9}+\dfrac{y_1^{\ 2}}{5}=1,\\ \dfrac{x_2^{\ 2}}{9}+\dfrac{y_2^{\ 2}}{5}=1,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\dfrac{(6-2x_2)^2}{9}+\dfrac{4y_2^{\ 2}}{5}=1,\\ \dfrac{x_2^{\ 2}}{9}+\dfrac{y_2^{\ 2}}{5}=1,\end{cases}$ 消 y_2，得 $x_2=\dfrac{21}{8}$.

代入 $\dfrac{x_2^{\ 2}}{9}+\dfrac{y_2^{\ 2}}{5}=1$，由对称性不妨设 $y_1>0,\ y_2<0$，所以 $y_2=-\dfrac{5\sqrt{3}}{8}$，

从而得，$x_1=\dfrac{3}{4},\ y_1=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$，

即 $A(\dfrac{3}{4},\dfrac{5\sqrt{3}}{4})$，$B(\dfrac{21}{8},-\dfrac{5\sqrt{3}}{8})$. …… 12 分

所以 $k_{oc}=-\dfrac{5\sqrt{3}}{21}$，直线 OC 的方程为 $y=-\dfrac{5\sqrt{3}}{21}x$，

联立 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$，得 $x^2=\dfrac{441}{16}$.

由题知 $x>0$，所以 $x=\dfrac{21}{4},\ y=-\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$，所以 $C(\dfrac{21}{4},-\dfrac{5\sqrt{3}}{4})$. …… 14 分

又 $D(6,0)$，所以 $k_{OA}=k_{CD}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

又因为 $OA,\ CD$ 不共线，所以 $OA\,/\!/\,CD$，

又 $k_{OC}=k_{AD}=-\dfrac{5\sqrt{3}}{21}$，且 $OC,\ AD$ 不共线，所以 $OC\,/\!/\,AD$.

所以四边形 $AOCD$ 是平行四边形. …… 16 分

（方法二）设直线 OC 的方程为 $y=kx$，

由 $\begin{cases}5x^2+9y^2=45,\\ y=kx,\end{cases}$ 得 $(5+9k^2)x^2=45$，

所以 $x_B=\pm\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5+9k^2}}$. …… 10 分

又由$\begin{cases}5x^2+9y^2=180,\\ y=kx,\end{cases}$得$(5+9k^2)x^2=180$，

所以$x_C=\pm\dfrac{6\sqrt{5}}{\sqrt{5+9k^2}}$．

又因为B，C在点O的同侧，

所以$x_C=2x_B$． …… 12 分

设$B(x_1,\ y_1)$，则$C(2x_1,2y_1)$，$D(6,0)$．

因为$AF=2FB$，所以$A(6-2x_1,-2y_1)$，

所以$\overrightarrow{OA}=(6-2x_1,-2y_1)$，$\overrightarrow{CD}=(6-2x_1,-2y_1)$，

所以$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CD}$．

又因为A，O，C，D四点不共线，所以四边形$AOCD$为平行四边形． … 16 分

（方法三）由方法二得，$OC=2OB$． …… 10 分

因为$F(2,0)$，$D(6,0)$，所以$FD=2OF$．

又因为$AF=2FB$，所以$OB//AD$，$AD=2OB$． …… 14 分

所以$OC//AD$，$OC=AD$，

所以四边形$AOCD$为平行四边形． …… 16 分

4．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$b_n=\dfrac{S_n}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$．若$\{b_n\}$是公差不为 0 的等差数列，且$b_2b_7=b_{11}$．

（1）求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）证明：数列$\{a_n\}$是等差数列．

【解】（1）设等差数列$\{b_n\}$的公差为d，因为$b_1=\dfrac{S_1}{a_1}=1$，所以$b_n=1+(n-1)d$．

由$b_2b_7=b_{11}$得，$(1+d)(1+6d)=1+10d$，即$2d^2-d=0$，

因为$d\neq0$，所以$d=\dfrac{1}{2}$，从而$b_n=\dfrac{1}{2}(n+1)$． …… 3 分

（2）由（1）知，$\dfrac{S_n}{a_n}=\dfrac{1}{2}(n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，

即有 $2S_n=(n+1)a_n$，　　　　　　　①

所以 $2S_{n+1}=(n+2)a_{n+1}$，　　　　　②

②−①得，$2a_{n+1}=(n+2)a_{n+1}-(n+1)a_n$，整理得 $na_{n+1}=(n+1)a_n$．　　　…… 5 分

两边除以 $n(n+1)$ 得，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=0$（$n\in\mathbf{N}^*$），

所以数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 是常数列．

所以 $\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_1}{1}=a_1$，即 $a_n=na_1$，

所以 $a_{n+1}-a_n=a_1$，

所以数列 $\left\{a_n\right\}$ 是等差数列．　　　…… 8 分