

直线与双曲线的位置关系

1: 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, 过点 $P(1,1)$ 的直线 l 与双曲线只有一个公共点, 求直线 l 的方程.

2、如果直线 $y=kx-1$ 与双曲线 $x^2-y^2=4$ 右支有两个公共点, 求 k 的取值范围

3. 过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的右焦点 F 作直线 l 交双曲线于 A 、 B 两点, 若 $|AB|=4$, 则这样的直线 l 有()

A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

4. 直线 $l: y=kx+1$ 与双曲线 $C: 2x^2-y^2=1$ 的右支交于不同的两点 A 、 B .

(1)求实数 k 的取值范围; (2)是否存在实数 k , 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F ?

若存在, 求出 k 的值; 若不存在, 说明理由.

5. 已知中心在原点的双曲线 C 的右焦点为 $(2, 0)$ ，右顶点为 $(\sqrt{3}, 0)$ 。(1) 求双曲线 C 的方程；

(2) 若直线 $l: y = kx + \sqrt{2}$ 与双曲线 C 恒有两个不同的交点 A 和 B ，且 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} > 2$ (其中 O 为原点)，求 k 的取值范围。

双曲线的离心率

1. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率是()

- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

2. (1) 若双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{4}{3}x$ ，求双曲线的离心率。

(2) 若双曲线的离心率为 2，则两条渐近线的夹角为_____。

3. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两条渐近线互相垂直，求双曲线的离心率。

4. 中心在原点，焦点在坐标轴上的双曲线的一条渐近线经过点 $(4, -2)$ ，求双曲线的离心率。

5. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点 F 引它的一条渐近线的垂线 FM , 垂足为 M , 并且交 y 轴于点 E , 若 M 为 EF 的中点, 求双曲线的离心率.

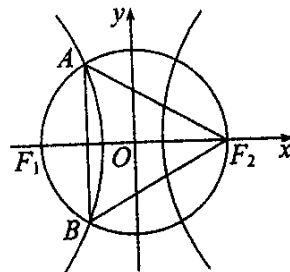
6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 若过点 F 且倾斜角为 60° 的直线 l 与双曲线的右支有且只有一个交点, 求双曲线的离心率 e 的取值范围.

7. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 若矩形 $ABCD$ 的四个顶点在 E 上, AB, CD 的中点为 E 的两个焦点, 且 $2AB = 3BC$, 求双曲线的离心率.

8. 已知点 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 若双曲线左支上存在点 P 与点 F_2 关于直线 $y = \frac{b}{a}x$ 对称, 求双曲线的离心率.

9. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} (0 < a < b)$ 的半焦距为 c ，直线 l 过 $(a, 0)$ ， $(0, b)$ 两点，已知原点到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{4}c$ ，求双曲线的离心率。

10. 如图， F_1 和 F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个焦点， A 、 B 是以 O 为圆心、以 OF_1 为半径的圆与该双曲线左支的两个交点，且 $\triangle F_2AB$ 是等边三角形，求双曲线的离心率。



11. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，若双曲线上存在一点 P 使

$$\frac{\sin \angle PF_1F_2}{\sin \angle PF_2F_1} = \frac{a}{c},$$

求双曲线的离心率 e 的取值范围.

12. 已知椭圆和双曲线有公共焦点 F_1, F_2 ， P 是它们的一个交点， $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ，记椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1 和 e_2 . (1) e_1 与 e_2 互为倒数，则 $e_1 =$ _____. (2) 求椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值.

直线与抛物线的位置关系

1. 已知直线 $l: y=kx+1$, 抛物线 $C: y^2=4x$, 当 k 为何值时, l 与 C : 只有一个公共点; 有两个公共点; 没有公共点.

2. 已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F(1,0)$, 抛物线 $E: x^2=2py$ 的焦点为 M .

(1) 若过点 M 的直线 l 与抛物线 C 有且只有一个交点, 求直线 l 的方程;

(2) 若直线 MF 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 求 $\triangle OAB$ 的面积.

3. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F , 过焦点 F 的直线与抛物线交于点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1^2+y_2^2$ 的最小值为() A.4 B.6 C.8 D.10

4. 已知 F 为抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点, 过 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , 直线 l_1 与 C 交于 A, B 两点, 直线 l_2 与 C 交于 D, E 两点, 求 $AB+DE$ 的最小值.

双曲线中的综合问题

1: 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, 过点 $P(1,1)$ 的直线 l 与双曲线只有一个公共点, 求直线 l 的方程. **[错解]**

设 $l: y = k(x-1) + 1$, 代入双曲线方程, 得 $(4-k^2)x^2 - (2k-2k^2)x - k^2 + 2k - 5 = 0$. 由题意, $\Delta = (2k-2k^2)^2 - 4(4-k^2)(-k^2+2k-5) = 0$, 所以 $k = \frac{5}{2}$.

[辨析] 错因在于忽视了 $4-k^2=0$, 即 l 与双曲线的渐近线平行时, l 与双曲线只有一个交点也符合题意. 另外没有考虑直线 l 斜率不存在的情况.

[正解] 可分两种情况: (1) 直线 l 斜率不存在时, $l: x=1$ 与双曲线相切, 符合题意; (2) 直线 l 斜率存在时, 设 l 方程为 $y = k(x-1) + 1$, 代入双曲线方程, 得 $(4-k^2)x^2 - (2k-2k^2)x - k^2 + 2k - 5 = 0$, 当 $4-k^2=0$ 时, $k = \pm 2$, 即 l 与双曲线的渐近线平行时, l 与双曲线只有一个公共点; 当 $4-k^2 \neq 0$ 时, 令 $\Delta = 0$, 所以 $k = \frac{5}{2}$. 综上, $k = \frac{5}{2}$ 或 $k = \pm 2$ 或 k 不存在.

2. 如果直线 $y = kx - 1$ 与双曲线 $x^2 - y^2 = 4$ 右支有两个公共点, 求 k 的取值范围

3. 过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的右焦点 F 作直线 l 交双曲线于 A, B 两点, 若 $|AB| = 4$, 则这样的直线 l 有 () A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

[解析] 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 当直线 l 的斜率不存在时, 其方程为 $x = \sqrt{3}$, 由 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$, 得 $y = \pm 2$, $\therefore |AB| = |y_1 - y_2| = 4$ 满足题意. 当直线 l 的斜率存在时, 其方程为 $y = k(x - \sqrt{3})$, 由 $\begin{cases} y = k(x - \sqrt{3}) \\ x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$,

$$\text{得 } (2-k^2)x^2 + 2\sqrt{3}k^2x - 3k^2 - 2 = 0.$$

$$\text{当 } 2-k^2 \neq 0 \text{ 时, } x_1 + x_2 = \frac{2\sqrt{3}k^2}{k^2-2}, x_1x_2 = \frac{3k^2+2}{k^2-2}, |AB| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

$$= \sqrt{1+k^2} \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}k^2}{k^2-2}\right)^2 - \frac{12k^2+8}{k^2-2}} = \sqrt{1+k^2} \sqrt{\frac{16(k^2+1)}{(k^2-2)^2}} = \frac{4(1+k^2)}{|k^2-2|} = 4,$$

解得 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故这样的直线有 3 条.

4. 直线 $l: y = kx + 1$ 与双曲线 $C: 2x^2 - y^2 = 1$ 的右支交于不同的两点 A, B . (1) 求实数 k 的取值范围; (2) 是否存在实数 k , 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F ? 若存在, 求出 k 的值; 若不存在, 说明理由.

[解析] (1) 将直线 l 的方程 $y = kx + 1$ 代入双曲线 C 的方程 $2x^2 - y^2 = 1$ 后整理得,

$$(k^2 - 2)x^2 + 2kx + 2 = 0 \quad ①$$

$$\text{依题意, 直线 } l \text{ 与双曲线 } C \text{ 的右支交于不同的两点, 故 } \begin{cases} k^2-2 \neq 0 \\ \Delta = (2k)^2 - 8(k^2-2) > 0 \\ -\frac{2k}{k^2-2} > 0 \\ \frac{2}{k^2-2} > 0 \end{cases},$$

解得 k 的取值范围为 $-2 < k < -\sqrt{2}$.

$$(2) \text{ 设 } A、B \text{ 两点的坐标分别为 } (x_1, y_1)、(x_2, y_2), \text{ 则由 } \textcircled{1} \text{ 式得 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2k}{2-k^2} \\ x_1 x_2 = \frac{2}{k^2-2} \end{cases},$$

假设存在实数 k , 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 $F(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$, 则 $FA \perp FB$, $\therefore (x_1 - \frac{\sqrt{6}}{2})(x_2 - \frac{\sqrt{6}}{2}) + y_1 y_2 = 0$, 即 $(x_1 - \frac{\sqrt{6}}{2})(x_2 - \frac{\sqrt{6}}{2}) + (kx_1 + 1)(kx_2 + 1) = 0$.

$$(1+k^2)x_1x_2 + (k - \frac{\sqrt{6}}{2})(x_1+x_2) + \frac{5}{2} = 0, \therefore (1+k^2) \cdot \frac{2}{k^2-2} + (k - \frac{\sqrt{6}}{2}) \cdot \frac{2k}{2-k^2} + \frac{5}{2} = 0,$$

化简得 $5k^2 + 2\sqrt{6}k - 6 = 0$. 解得 $k = -\frac{6+\sqrt{6}}{5}$, 或 $k = \frac{6-\sqrt{6}}{5} \notin (-2, -\sqrt{2})$ (舍去).

可知 $k = -\frac{6+\sqrt{6}}{5}$ 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点.

5. 已知中心在原点的双曲线 C 的右焦点为 $(2, 0)$, 右顶点为 $(\sqrt{3}, 0)$.

→ →

(1) 求双曲线 C 的方程; (2) 若直线 $l: y = kx + \sqrt{2}$ 与双曲线 C 恒有两个不同的交点 A 和 B , 且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 2$ (其中 O 为原点), 求 k 的取值范围.

[解析] (1) 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$. 由已知得 $a = \sqrt{3}$, $c = 2$, 于是 $a^2 + b^2 = 2^2$, $b^2 = 1$,

故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$. (2) 将 $y = kx + \sqrt{2}$ 代入 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$, 得

$(1-3k^2)x^2 - 6\sqrt{2}kx - 9 = 0$. 由直线 l 与双曲线交于不同的两点, 得

$$\begin{cases} 1-3k^2 \neq 0 \\ \Delta = (6\sqrt{2}k)^2 + 36(1-3k^2) = 36(1-k^2) > 0 \end{cases}, \text{ 即 } k^2 \neq \frac{1}{3} \text{ 且 } k^2 < 1.$$

$$\text{设 } A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), \text{ 则 } x_A + x_B = \frac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2}, x_A x_B = \frac{-9}{1-3k^2}.$$

→ →

由 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 2$, 得 $x_A x_B + y_A y_B > 2$. $x_A x_B + y_A y_B = x_A x_B + (kx_A + \sqrt{2})(kx_B + \sqrt{2})$

$$=(k^2+1)x_Ax_B+\sqrt{2}k(x_A+x_B)+2=(k^2+1)\frac{-9}{1-3k^2}+\sqrt{2}k\frac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2}+2=\frac{3k^2+7}{3k^2-1}.$$

于是 $\frac{3k^2+7}{3k^2-1}>2$, 即 $\frac{-3k^2+9}{3k^2-1}>0$, 解得 $\frac{1}{3}<k^2<3$, 又 $\because k^2<1$,

$\therefore \frac{1}{3}<k^2<1$, 故 k 的取值范围为 $(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$.

直线与抛物线的位置关系

1. 已知直线 $l: y=kx+1$, 抛物线 $C: y^2=4x$, 当 k 为何值时, l 与 C : 只有一个公共点; 有两个公共点; 没有公共点.

解 联立 $\begin{cases} y=kx+1, \\ y^2=4x, \end{cases}$ 消去 y , 得 $k^2x^2+(2k-4)x+1=0$. (*)

当 $k=0$ 时, (*) 式只有一个解 $x=\frac{1}{4}$, $\therefore y=1$, $\therefore$ 直线 l 与 C 只有一个公共点 $(\frac{1}{4}, 1)$,

此时直线 l 平行于 x 轴. 当 $k \neq 0$ 时, (*) 式是一个一元二次方程,

$\Delta=(2k-4)^2-4k^2=16(1-k)$. ①当 $\Delta>0$, 即 $k<1$, 且 $k \neq 0$ 时,

l 与 C 有两个公共点, 此时直线 l 与 C 相交;

②当 $\Delta=0$, 即 $k=1$ 时, l 与 C 有一个公共点, 此时直线 l 与 C 相切;

③当 $\Delta<0$, 即 $k>1$ 时, l 与 C 没有公共点, 此时直线 l 与 C 相离.

综上所述, 当 $k=1$ 或 0 时, l 与 C 有一个公共点;

当 $k<1$, 且 $k \neq 0$ 时, l 与 C 有两个公共点; 当 $k>1$ 时, l 与 C 没有公共点.

2. 已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F(1,0)$, 抛物线 $E: x^2=2py$ 的焦点为 M .

(1) 若过点 M 的直线 l 与抛物线 C 有且只有一个交点, 求直线 l 的方程;

(2) 若直线 MF 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 求 $\triangle OAB$ 的面积.

解 (1) 因为抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F(1,0)$, 抛物线 $E: x^2=2py$ 的焦点为 M , 所以 $p=2, M(0,1)$.

①当直线 l 的斜率不存在时, 其方程为 $x=0$, 满足题意;

②当直线 l 的斜率存在时, 设方程为 $y=kx+1$, 代入 $y^2=4x$, 得 $k^2x^2+(2k-4)x+1=0$, 当 $k=0$ 时, $x=\frac{1}{4}$, 满足题意, 直线 l 的方程为 $y=1$; 当 $k \neq 0$ 时, 令 $\Delta=(2k-4)^2-4k^2=0$, 所以 $k=1$, 直线 l 的方程为 $y=x+1$. 综上, 直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $y=1$ 或 $y=x+1$.

(2) 结合 (1) 知抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$, 直线 MF 的方程为 $y=-x+1$.

联立 $\begin{cases} y^2=4x, \\ y=-x+1, \end{cases}$ 得 $y^2+4y-4=0$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则 $y_1 + y_2 = -4$, $y_1 y_2 = -4$, 所以 $|y_1 - y_2| = 4\sqrt{2}$, 所以 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OF |y_1 - y_2| = 2\sqrt{2}$.

3. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过焦点 F 的直线与抛物线交于点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $y_1^2 + y_2^2$ 的最小值为() A.4 B.6 C.8 D.10

解析 由焦点弦的性质知, $y_1 y_2 = -4$, 即 $|y_1| |y_2| = 4$, 则 $y_1^2 + y_2^2 \geq 2|y_1| |y_2| = 8$,

当且仅当 $|y_1| = |y_2| = 2$ 时, 取等号. 故 $y_1^2 + y_2^2$ 的最小值为 8. 答案 C

4. 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 过 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , 直线 l_1 与 C 交于 A, B 两点, 直线 l_2 与 C 交于 D, E 两点, 求 $AB + DE$ 的最小值.

解析 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 由题意可知 l_1, l_2 的斜率存在且不为 0.

不妨设直线 l_1 的斜率为 k ,

$l_1: y = k(x-1), l_2: y = -\frac{1}{k}(x-1)$, 由 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = k(x-1), \end{cases}$ 消去 y 得 $k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{2k^2 + 4}{k^2} = 2 + \frac{4}{k^2}$, 由抛物线的定义可知,

$AB = x_1 + x_2 + 2 = 2 + \frac{4}{k^2} + 2 = 4 + \frac{4}{k^2}$. 同理得 $DE = 4 + 4k^2$,

$\therefore AB + DE = 4 + \frac{4}{k^2} + 4 + 4k^2 = 8 + 4\left(\frac{1}{k^2} + k^2\right) \geq 8 + 8 = 16$, 当且仅当 $\frac{1}{k^2} = k^2$, 即 $k = \pm 1$ 时取等号,

故 $AB + DE$ 的最小值为 16.