

解析：因为圆 $x^2+y^2-4y=0$ 的圆心坐标为 $C(0,2)$ ，又点 P 坐标为 $(-1,1)$ ，所以直线 CP 的斜率为 $k_{CP} = \frac{2-1}{0+1} = 1$.

又因为 AB 是圆的一条弦， P 为 AB 的中点，

所以 $AB \perp CP$ ，故 $k_{AB} = -1$ ，即直线 l 的斜率为 -1 ，

因此，直线 l 的方程为 $y-1=-(x+1)$ ，即 $x+y=0$.

答案： $x+y=0$

6. 已知圆 C 的圆心坐标是 $(0, m)$ ，半径长是 r . 若直线 $2x - y + 3 = 0$ 与圆 C 相切于点 $A(-2, -1)$ ，则 $m =$ _____， $r =$ _____.

答案 $-2 \quad \sqrt{5}$

知识梳理

1. 直线与圆位置关系的判定

2. 圆与圆关系的判定

典例研究

题型一 直线与圆的位置关系

例 1. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a \sin A + b \sin B - c \sin C = 0$ ，则圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 与直线 $l: ax + by + c = 0$ 的位置关系是()

A. 相切 B. 相交 C. 相离 D. 不确定

解析 因为 $a \sin A + b \sin B - c \sin C = 0$ ，

所以由正弦定理得 $a^2 + b^2 - c^2 = 0$.

故圆心 $C(0, 0)$ 到直线 $l: ax + by + c = 0$ 的距离 $d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1 = r$ ，故圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 与直线 $l: ax + by + c = 0$ 相切，故选 A.

答案 A

题型二 圆的切线、弦长问题

例 2. 已知点 $P(\sqrt{2} + 1, 2 - \sqrt{2})$ ，点 $M(3, 1)$ ，圆 $C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

(1) 求过点 P 的圆 C 的切线方程；

(2)求过点 M 的圆 C 的切线方程, 并求出切线长.

[解] (1)由题意得圆心 $C(1,2)$, 半径长 $r=2$.

因为 $(\sqrt{2}+1-1)^2+(2-\sqrt{2}-2)^2=4$, 所以点 P 在圆 C 上. 又 $k_{PC}=\frac{2-\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+1-1}=-1$, 所以切线的斜率

$$k=-\frac{1}{k_{PC}}=1.$$

所以过点 P 的圆 C 的切线方程是 $y-(2-\sqrt{2})=1\times[x-(\sqrt{2}+1)]$, 即 $x-y+1-2\sqrt{2}=0$.

(2)因为 $(3-1)^2+(1-2)^2=5>4$,

所以点 M 在圆 C 外部.

当过点 M 的直线斜率不存在时, 直线方程为 $x=3$,

又点 $C(1,2)$ 到直线 $x-3=0$ 的距离 $d=3-1=2=r$,

即此时满足题意, 所以直线 $x=3$ 是圆的切线.

当切线的斜率存在时, 设切线方程为 $y-1=k(x-3)$,

即 $kx-y+1-3k=0$,

则圆心 C 到切线的距离 $d=\frac{|k-2+1-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=r=2$,

解得 $k=\frac{3}{4}$. 所以切线方程为 $y-1=\frac{3}{4}(x-3)$,

即 $3x-4y-5=0$.

综上可得, 过点 M 的圆 C 的切线方程为 $x=3$ 或 $3x-4y-5=0$.

因为 $|MC|=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$,

所以过点 M 的圆 C 的切线长为 $\sqrt{|MC|^2-r^2}=\sqrt{5-4}=1$.

题型三 圆与圆的位置关系

例 3. 已知两圆 $x^2+y^2-2x-6y-1=0$, $x^2+y^2-10x-12y+m=0$.

(1) m 取何值时两圆外切?

(2) m 取何值时两圆内切?

(3)当 $m=45$ 时, 求两圆的公共弦所在直线的方程和公共弦的长.

解 因为两圆的标准方程分别为 $(x-1)^2+(y-3)^2=11$,

$$(x-5)^2+(y-6)^2=61-m,$$

所以两圆的圆心分别为 $(1, 3)$, $(5, 6)$, 半径分别为 $\sqrt{11}$, $\sqrt{61-m}$,

(1)当两圆外切时, 由 $\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2}=\sqrt{11}+\sqrt{61-m}$, 得 $m=25+10\sqrt{11}$.

(2)当两圆内切时, 因为定圆半径 $\sqrt{11}$ 小于两圆圆心之间的距离 5, 所以 $\sqrt{61-m}-\sqrt{11}=5$, 解得 $m=25-10\sqrt{11}$.

(3)由 $(x^2+y^2-2x-6y-1)-(x^2+y^2-10x-12y+45)=0$, 得两圆的公共弦所在直线的方程为 $4x+3y-23=0$.

故两圆的公共弦的长为 $2\sqrt{(\sqrt{11})^2 - \left(\frac{|4 \times 1 + 3 \times 3 - 23|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}\right)^2} = 2\sqrt{7}$.

课堂小结

跟踪反馈

1. (2021 江苏部分学校调研)圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 关于直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 对称的圆的方程是()

A. $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$

B. $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=4$

C. $x^2+(y-2)^2=4$

D. $(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$

解析: 选 D 设圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 的圆心 $(2,0)$ 关于直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 对称的点的坐标为 (a,b) , 则有

$$\begin{cases} \frac{b}{a-2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -1, \\ \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a+2}{2}, \end{cases}$$

解得 $a=1, b=\sqrt{3}$, 从而所求圆的方程为 $(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$. 故选 D.

2. 过点 $(2,1)$ 的直线中被圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 截得的弦长最大的直线方程是()

A. $3x-y-5=0$

B. $3x+y-7=0$

C. $x+3y-5=0$

D. $x-3y+5=0$

解析: 选 A $\because$ 过点 $(2,1)$ 的直线中被圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 截得的弦长最大的直线方程经过圆心, $\therefore$ 其直线方程为过点 $(2,1)$ 和圆心 $(1,-2)$ 的直线,

$$\therefore \text{其方程为: } \frac{y+2}{x-1} = \frac{1+2}{2-1},$$

整理, 得 $3x - y - 5 = 0$. 故选 A.

3. 过点 $(-4, 0)$ 作直线 l 与圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ 交于 A, B 两点 若 $|AB| = 8$ 则直线 l 的方程为()

A . $5x + 12y + 20 = 0$

B . $5x + 12y + 20 = 0$ 或 $x + 4 = 0$

C . $5x - 12y + 20 = 0$

D . $5x - 12y + 20 = 0$ 或 $x + 4 = 0$

解析: 选 B 圆的标准方程为 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$,

由 $|AB| = 8$ 知, 圆心 $(-1, 2)$ 到直线 l 的距离 $d = 3$.

当直线 l 的斜率不存在, 即直线 l 的方程为 $x = -4$ 时, 符合题意.

当直线 l 的斜率存在时, 设直线 l 的方程为 $y = k(x+4)$, 即 $kx - y + 4k = 0$. 则有 $\frac{|3k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 3$, $\therefore k = -\frac{5}{12}$.

此时直线 l 的方程为 $5x + 12y + 20 = 0$.

4. 已知直线 $y = ax$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 6y + 6 = 0$ 相交于 A, B 两点, C 为圆心. 若 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 则 a 的值为()

A . 1

B . ± 1

C . $\sqrt{3}$

D . $\pm\sqrt{3}$

解析: 选 D 根据题意, 圆 $C: x^2 + y^2 - 6y + 6 = 0$ 即 $x^2 + (y-3)^2 = 3$, 其圆心为 $(0, 3)$, 半径 $r = \sqrt{3}$, 直线 $y = ax$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 6y + 6 = 0$ 相交于 A, B 两点, 若 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 则圆心 C 到直线 $y = ax$ 的距离 $d = \frac{3}{2}$, 则有 $\frac{|3|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{3}{2}$, 解得 $a = \pm\sqrt{3}$.

5. 已知圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 上的点到直线 $y = \sqrt{3}x + b$ 的最短距离为 $\sqrt{3}$, 则 b 的值为()

A . -2 或 2

B . 2 或 $4\sqrt{3} + 2$

C . -2 或 $4\sqrt{3} + 2$

D . $-4\sqrt{3} - 2$ 或 2

解析: 选 D 由圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$,

可得圆心坐标为 $(2, 0)$, 半径 $r = 1$,

设圆心 $(2, 0)$ 到直线 $y = \sqrt{3}x + b$ 的距离为 d ,

则 $d = \frac{|2\sqrt{3}+b|}{\sqrt{3+1}}$, 因为圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 上的点到直线 $y = \sqrt{3}x + b$ 的最短距离为 $\sqrt{3}$, 所以 $d - r = \sqrt{3}$,

即 $\frac{|2\sqrt{3}+b|}{\sqrt{3+1}}-1=\sqrt{3}$, 解得 $b=2$ 或 $b=-4\sqrt{3}-2$, 故选 D.

6. (多选)若直线 $l: y=kx+1$ 与圆 $C: (x+2)^2+(y-1)^2=2$ 相切, 则直线 l 与圆 $D: (x-2)^2+y^2=3$ 的位置关系是()

A. 相交

B. 相切

C. 相离

D. 不确定

解析: 选 AC 由题意知 $C(-2,1)$, 圆 C 的半径为 $\sqrt{2}$,

则 $\frac{|-2k-1+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$, 解得 $k=\pm 1$,

则直线 l 的方程为 $y=\pm x+1$.

$D(2,0)$, 圆 D 的半径为 $r=\sqrt{3}$,

$k=1$ 时, D 到直线 l 的距离为 $\frac{|2+1|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}>\sqrt{3}$, 相离;

$k=-1$ 时, D 到直线 l 的距离为 $\frac{|-2+1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<\sqrt{3}$, 相交, 故选 A、C.

7. 直线 $x-y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x-1=0$ 有两个不同交点的一个充分不必要条件是()

A. $0<m<1$

B. $-1<m<0$

C. $m<1$

D. $-3<m<1$

答案 AB

8. 若 A 为圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 上的动点, B 为圆 $C_2: (x-3)^2+(y+4)^2=4$ 上的动点, 则线段 AB 长度的最大值是_____.

解析 圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 的圆心为 $C_1(0, 0)$, 半径 $r_1=1$,

圆 $C_2: (x-3)^2+(y+4)^2=4$ 的圆心为 $C_2(3, -4)$, 半径 $r_2=2$,

$\therefore C_1C_2=5$. 又 A 为圆 C_1 上的动点, B 为圆 C_2 上的动点,

$\therefore$ 线段 AB 长度的最大值是 $C_1C_2+r_1+r_2=5+1+2=8$.

答案 8

9. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 4$, 直线 $l: x - y + 6 = 0$, 在直线 l 上任取一点 P 向圆 C 作切线, 切点为 A, B , 连接 AB , 则直线 AB 一定过定点_____.

解析: 设点 $P(x_0, y_0)$, 则 $x_0 - y_0 + 6 = 0$.

以 CP 为直径的圆的方程为 $x(x - x_0) + y(y - y_0) = 0$,

又圆 $C: x^2 + y^2 = 4$, 作差可得直线 AB 的方程为 $xx_0 + yy_0 = 4$, 将 $y_0 = x_0 + 6$, 代入可得 $(x + y)x_0 + 6y - 4 = 0$,

$$\text{满足} \begin{cases} x + y = 0, \\ 6y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}, \\ y = \frac{2}{3}, \end{cases}$$

故直线 AB 过定点 $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

答案: $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

10. 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 上存在两点关于直线 $l: x + my + 1 = 0$ 对称, 经过点 $M(m, m)$ 作圆 C 的切线, 切点为 P , 则 $|MP| =$ _____.

解析: 圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 的圆心为 $C(1, 2)$, 半径为 2. 因为圆上存在两点关于直线 $l: x + my + 1 = 0$ 对称, 所以直线 $l: x + my + 1 = 0$ 过点 $(1, 2)$, 所以 $1 + 2m + 1 = 0$, 解得 $m = -1$, 所以 $|MC|^2 = 13$, $|MP| = \sqrt{13 - 4} = 3$.

答案: 3

11. 已知圆 C 经过点 $(0, 1)$ 且圆心为 $C(1, 2)$.

(1) 写出圆 C 的标准方程;

(2) 过点 $P(2, -1)$ 作圆 C 的切线, 求该切线的方程及切线长.

解: (1) 由题意知, 圆 C 的半径 $r = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{2}$,

所以圆 C 的标准方程为 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$.

(2) 由题意知切线斜率存在, 故设过点 $P(2, -1)$ 的切线方程为 $y + 1 = k(x - 2)$, 即 $kx - y - 2k - 1 = 0$,

$$\text{则} \frac{|-k - 3|}{\sqrt{1 + k^2}} = \sqrt{2},$$

所以 $k^2 - 6k - 7 = 0$, 解得 $k = 7$ 或 $k = -1$,

故所求切线的方程为 $7x - y - 15 = 0$ 或 $x + y - 1 = 0$.

由圆的性质易得所求切线长为 $\sqrt{PC^2 - r^2} = \sqrt{(2 - 1)^2 + (-1 - 2)^2 - 2} = 2\sqrt{2}$.

12.如图,已知圆 C 与 y 轴相切于点 T(0, 2), 与 x 轴的正半轴交于两点 M, N(点 M 在点 N 的左侧), 且 $|MN|=3$.

(1)求圆 C 的方程;

(2)过点 M 任作一直线与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 连接 AN, BN, 求证: $k_{AN} + k_{BN}$ 为定值.

解: (1)因为圆 C 与 y 轴相切于点 T(0,2), 可设圆心的坐标为 $(m, 2)(m > 0)$, 则圆 C 的半径为 m,

又 $|MN|=3$, 所以 $m^2 = 4 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$,

解得 $m = \frac{5}{2}$,

所以圆 C 的方程为 $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{25}{4}$.

(2)**证明:** 由(1)知 $M(1, 0)$, $N(4, 0)$, 当直线 AB 的斜率为 0 时, 易知 $k_{AN} = k_{BN} = 0$, 即 $k_{AN} + k_{BN} = 0$.

当直线 AB 的斜率不为 0 时, 设直线 AB: $x = 1 + ty$, 将 $x = 1 + ty$ 代入 $x^2 + y^2 - 4 = 0$, 并整理得 $(t^2 + 1)y^2 + 2ty - 3 = 0$.

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 所以 } \begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{2t}{t^2 + 1}, \\ y_1 y_2 = \frac{-3}{t^2 + 1}, \end{cases}$$

$$\text{则 } k_{AN} + k_{BN} = \frac{y_1}{x_1 - 4} + \frac{y_2}{x_2 - 4} = \frac{y_1}{ty_1 - 3} + \frac{y_2}{ty_2 - 3}$$

$$= \frac{2ty_1 y_2 - 3(y_1 + y_2)}{(ty_1 - 3)(ty_2 - 3)} = \frac{\frac{-6t}{t^2 + 1} + \frac{6t}{t^2 + 1}}{(ty_1 - 3)(ty_2 - 3)} = 0.$$

综上所述, $k_{AN} + k_{BN}$ 为定值.