

高三数学试题

考生须知：

1. 本试卷满分 120 分，考试时间为 120 分钟.
2. 答题前，考生先将自己的“姓名”、“考号”、“考场”、“座位号”在答题卡上填写清楚，将“条形码”准确粘贴在条形码区域内.
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的区域内作答，超出答题区域的答案无效；在草稿纸上、试题纸上答案无效.
4. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚.
5. 保持卡面整洁，不要折叠、不要弄脏、弄皱，不准使用涂改液、刮纸刀.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $M = \{x | (x+3)(x-1) < 0\}$, $N = \{x | 0 < x < 4\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$

- A. $(0,1)$ B. $(-1,4)$ C. $(0,3)$ D. $(-1,3)$

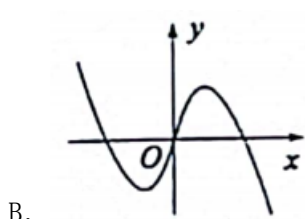
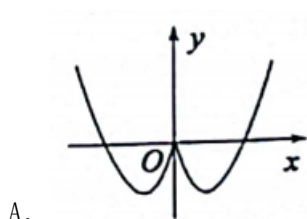
2. 已知 i 为虚数单位, 若 $z = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta}$, 则 z 的共轭复数 $\bar{z} = (\quad)$

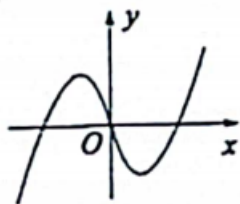
- A. $\cos \theta - i \sin \theta$ B. $\sin \theta - i \cos \theta$ C. $\sin \theta + i \cos \theta$ D. $\cos \theta + i \sin \theta$

3. 《九章算术》是我国古代的数学巨著, 书中有如下问题: “今有大夫、不更、簪裹、上造、公士, 凡五人, 共出百钱. 欲令高爵出少, 以次渐多, 问各几何?” 意思是: “有大夫、不更、簪裹、上造、公士(爵位依次变低) 5 个人共出 100 钱, 按照爵位从高到低每人所出钱数成等差数列, 这 5 个人各出多少钱?”. 在这个问题中, 若大夫出 4 钱, 则上造出的钱数为 $(\quad)$

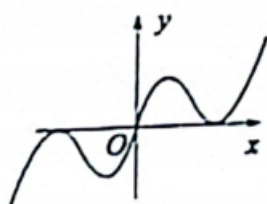
- A. 8 B. 12 C. 20 D. 28

4. 函数 $f(x) = 2(x^3 - x)e^{|x|}$ 的图象大致是 $(\quad)$





C.



D.

5. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 3$. 且 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

6. 已知角 α 的顶点为坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边经过点 $P(-3, 4)$. 则 $\cos 2\alpha =$ ()

- A. $\frac{7}{25}$ B. $-\frac{7}{25}$ C. $\frac{24}{25}$ D. $-\frac{24}{25}$

7. 已知函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x+2) = -f(x)$, 且当 $x \in [0, 2)$ 时, $f(x) = \log_2(x+1)$, 则

$$f(2021) - f(-2021) = ()$$

- A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, $P(x_0, y_0)$ 是直线 $bx - ay + 2a = 0$ 上任意一点, 若圆

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 2$ 与双曲线 C 的右支没有公共点. 则双曲线 C 的离心率的取值范围是 ()

- A. $(1, 2]$ B. $(1, \sqrt{2}]$ C. $(2, +\infty)$ D. $[\sqrt{2}, +\infty)$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 部分选对得 3 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列命题为真命题的是 ()

- A. 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$ B. 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 < ab < b^2$
C. 若 $c > a > b > 0$, 则 $\frac{a}{c-a} < \frac{b}{c-b}$ D. 若 $a > b > c > 0$, 则 $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$

10. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 下列说法正确的是 ()

- A. 若 $m \perp \alpha, n \perp \alpha$, 则 $m \parallel n$ B. 若 $\alpha \perp \beta, m \perp \beta, m \not\subset \alpha$, 则 $m \parallel \alpha$
C. 若 $\alpha \perp \beta, m \subset \alpha$, 则 $m \perp \beta$ D. 若 $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m \parallel \beta, n \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$

11. 二项展开式 $(2x-1)^5 = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 则 ()

- A. $a_0 = -1$ B. $5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 10$
C. $a_3 = 80$ D. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$

12. 已知函数 $f(x) = a \sin x + b \cos x (ab \neq 0)$, 且对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$, 则 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π B. $f(x)$ 在上 $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 单调递增
C. $\frac{5\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 的一个零点 D. $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$

三. 填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 曲线 $y = xe^x$ 在点 $(1, c)$ 处的切线方程为 _____

14. 斜率为 1 的直线 l 经过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F , 且与该抛物线相交于 A, B 两点. 则 $|AB| =$ _____

15. 甲、乙两人从 4 门不同的课程中各随机选修 2 门课程. 则甲、乙所选的课中至少有 1 门课程不同的概率为 _____

16. 已知侧棱长为 3 的正四棱锥 $S-ABCD$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, 当该棱锥体积最大时, 底面 $ABCD$ 的边长为 _____, 此时球 O 的表面积为 _____ (本题第一空 3 分, 第二空 2 分)

四. 解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在 ① $2\sin A = 3\sin B$; ② $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{15}}{4}$; ③ $b(b\cos C + c\cos B) = 6$ 这三个条件中任选一个补充在下面的问题中, 并解答.

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a - b = 1, \cos C = -\frac{1}{4}$ _____

(1) 求 c 的值;

(2) 求 $\tan 2B$ 的值.

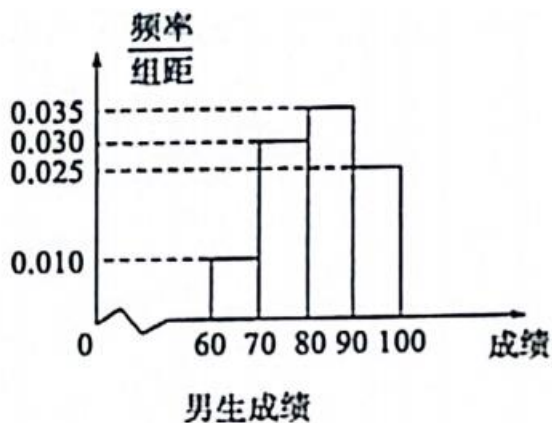
注: 如果选择多种方案分别解答, 那么接第一种方案的解答记分.

18. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $3S_3 = S_1 + 2S_2, a_1 = 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \log_2 a_n, c_n = a_n + \frac{1}{b_n b_{n+1}}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n

19. 2020 年春, 我国武汉出现新型冠状病毒, 感染后会出现发热、咳嗽、气促和呼吸困难等症状, 严重的可导致肺炎甚至危及生命. 新型冠状病毒疫情牵动每一个中国人的心. 为了遏制病毒的传播, 危难时刻全国人民众志成城, 共克时艰. 某校为了了解学生对新型冠状病毒的防护认识, 对该校学生开展网上防疫知识有奖竞赛活动. 并从男生、女生中各随机抽取 20 人, 统计答题成绩分别制成如下频率分布直方图和频数分布表:



成绩	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100)
频数	7	7	4	2

女生成绩

规定: 成绩在 80 分以上(含 80 分)的同学称为“防疫明星”.

(1) 根据以上数据, 完成以下 2×2 列联表, 并判断是否有 99% 的把握认为“防疫明星”与性别有关;

	男生	女生	合计
防疫明星			
非防疫明星			
合计			

(2) 以样本估计总体, 以频率估计概率, 现从该校男生中随机抽取 4 人, 其中“防疫明星”的人数为 X , 求随机变量的分布列与数学期望.

附: 参考公式 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$

参考数据:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
-------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

21. 如图 1,一副标准的三角板中 $\angle B = \angle E = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $DE = EF$, $BC = DF$, 将三角板的 BC 边与 DF 重合,把两个三角板拼成一个空间图形,如图 2. 设 M 是 AC 的中点, N 是 BC 的中点.

(1) 求证:平面 $ABC \perp$ 平面 EMN

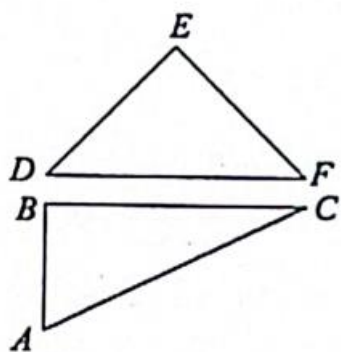


图1

(2) 若 $AC = 2EM = 4$, 求二面角 $E-AC-B$ 的余弦值.

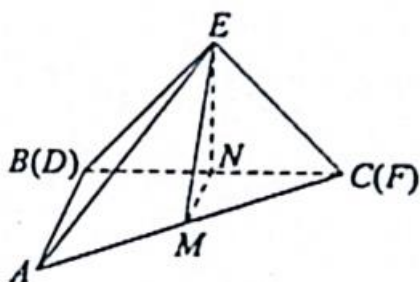


图2

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $P(2, \sqrt{2})$ 在椭圆 C 上, 且满足

$$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = \overrightarrow{PF_2}^2$$

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 交于不同两点 M, N , 且 $OM \perp ON$, 证明: 总存在一个确定的圆与直线 l 相切, 并求该圆的方程.

22. 已知函数 $f(x) = -\frac{a}{x} + \ln x$

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a=1$, 证明: $f\left(\frac{1}{x}\right) > -e^x$