江苏省仪征中学2020—2021学年度第一学期高二数学

周末练习（8）

一、单项选择题（本大题共8小题，共40分）

1.抛物线$y^2=8x$的准线方程是（　　）

A. $x=\frac{1}{2}$　　B. $x=-2$　　C. $x=2$　　D. $x=-\frac{1}{2}$

2.设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_2=2,\ a_5=16$，则S_{10}=（　　）

A．-1023　　B．511　　C．1023　　D．-511

3. 若双曲线C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{13}}{3}$，则双曲线的渐近线方程为（ ）

A. $y=\pm\sqrt{2}x$　　B. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　C. $y=\pm\frac{2}{3}x$　　D. $y=\pm\frac{3}{2}x$

4.《张丘建算经》是我国北魏时期大数学家张丘建所著，约成书于公元466-485年间．其中记载着这么一道“女子织布”问题：某女子善于织布，一天比一天织得快，且每日增加的数量相同．已知第一日织布4尺，20日共织布232尺，则该女子织布每日增加（　）尺

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{16}{29}$　　C. $\frac{8}{15}$　　D. $\frac{4}{7}$

5．不等式$x^2+3x+2>0$成立的一个必要不充分条件是（　　）

A．$(-1,+\infty)$　　B．$[-1，+\infty)$

C．$(-\infty，-2]\cup[-1，+\infty)$　　D．$(-1，+\infty)\cup(-\infty，-2)$

6．过$\left(\frac{1}{4},0\right)$的直线与抛物线$y^2=x$交于$A$，$B$两点，若$|AB|=4$，则弦$AB$的中点到直线$x+\frac{1}{2}=0$的距离等于（　　）

A. 4　　B. 2　　C. $\frac{7}{4}$　　D. $\frac{9}{4}$

7.“蒙日圆”涉及几何学中的一个著名定理，该定理的内容为：椭圆上任意两条互相垂直的切线的交点必在一个与椭圆同心的圆上，该圆称为原椭圆的蒙日圆，若椭圆C：$\frac{x^2}{a+1}+\frac{y^2}{a}=1(a>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，则椭圆$C$的蒙日圆方程为（　　）

A．$x^2+y^2=9$　　B．$x^2+y^2=7$　　C．$x^2+y^2=5$　　D．$x^2+y^2=4$

8.已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$，前n项和为S_n，且满足$2a_{n+1}+S_n=2$（$n\in N^*$），则满足$\frac{1001}{1000}<\frac{S_{2n}}{S_n}<\frac{11}{10}$的正整数$n$的最大值为（　）

A.7　　B.8　　C.9　　D.10

二、多项选择题（本大题共 4 小题，共 20 分）

9．下列说法正确的是（　　）

A．命题“$\forall x>2, x^2-4>0$”的否定是“$\exists x>2, x^2-4<0$”

B．“$(a-b)a^2<0$”是“$a<b$”的充分不必要条件

C．若$a>b>0$，则$\frac{b}{a}<\frac{b+3}{a+3}$

D．若ax^2+ax-1在R上恒小于 0，则a的取值范围是$-4<a<0$

10．已知$P(x_0,y_0)$是椭圆$C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$上一点，$F_1$、$F_2$分别为$C$的左、右焦点，则下列结论正确的是（　　）

A．$PF_1+PF_2=8$　　B．$PF_1=ex_0+a\in[1,7]$

C．准线方程为$x=\pm\frac{16}{3}$　　D．ΔPF_1F_2周长为 16

11．设$x>0$，则下列结论正确的是（　　）

A. $x+\frac{1}{x}\geq 2$　　B. $2^x+\frac{1}{2^x}\geq 2$　　C. $2^x+\frac{4}{2^x}\geq 4$　　D. $\ln x+\frac{1}{\ln x}\geq 2$

12．已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F到准线的距离为 2，过点F的直线与抛物线交于P,Q两点，M为线段PQ的中点，O为坐标原点，则（　　）

A．C的准线方程为$y=-1$　　B．线段PQ长度的最小值为 4

C．$S_{\Delta OPQ}\geq 2$　　D．$\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ}=-3$

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20 分）

13．椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的右焦点为F，以点F为焦点的抛物线的标准方程是____

14．已知椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，过椭圆右焦点且与$x$轴垂直的直线与椭圆交于$P,Q$两点，椭圆的右准线与$x$轴交于点$M$，若$\Delta PQM$为正三角形，则椭圆的离心率为______.

15．已知正实数x,y满足$x+y=1$，则$\frac{y}{x}+\frac{2}{xy}$的最小值为______.

16. 已知S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，满足$S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n$，则$a_n=$__________；

数列$\{\frac{n+3}{a_na_{n+1}}•\frac{1}{2^n}\}$的前$n$项和$T_n=$____________.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分）

17. 已知$A=\left\{x\left|\frac{1-x}{x-2}>0\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|x^2-2x+1-m^2<0,m>0\right.\right\}$.

（1）若$m=2$，求$A\cap B$;

（2）若$x\in A$是$x\in B$的充分不必要条件，求实数m的取值范围.

18. 已知公差不为零的等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$且a_2,a_4,a_8成等比数列.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式;

（2）已知$b_n=\frac{1}{S_n}+2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

19. 已知各项均为正数的数列$\left\{a_n\right\}$，其前n项和为S_n，满足$2S_n=a_n^2+a_n$.

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式;

（2）若$b_n=(3a_n-1)2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

20. 已知抛物线$C: y^2=2px(p>0)$过点$P(1,2)$

（1）求抛物线C的标准方程；

（2）过点P作直线PM,PN，分别交抛物线C于M,N两点，若直线PM,PN的倾斜角互补，求证：直线MN的斜率为定值。

21. 已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的离心率为$\sqrt{5}$，虚轴长为4.

（1）求双曲线的标准方程；

（2）直线l：$y=mx+1$与双曲线C相交于A，B两点，O为坐标原点，

①求实数m的取值范围；

②若ΔOAB的面积是$2\sqrt{2}$，求直线l的方程.

22．设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，离心率为$\frac{1}{2}$，短轴长为$2\sqrt{3}$.

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）设左、右顶点分别为A、B，点M在椭圆上（异于点A、B），求$k_{MA}k_{MB}$的值；

（3）过点F_2作一条直线与椭圆C交于P,Q两点，过P,Q作直线$x=\frac{a^2}{c}$的垂线，垂足为S,T．试问：直线PT与QS是否交于定点？若是，求出该定点的坐标，否则说明理由.

江苏省仪征中学2020—2021学年度第一学期高二数学

周末练习（8）答案

一、单项选择题：BCCA　CDCC

二、多项选择题：9. BC　10. ABC　11.AC　12. BCD

三、填空题（本大题共4小题，共20.0分）

13．$y^2=4\sqrt{3}x$　14．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　15．$4+2\sqrt{6}$　16．$n+1$；$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^n(n+2)}$

四、解答题（本大题共6小题，共70.0分）

17. 解：（1）$A=\{x|1<x<2\}, B=\{x|1-m<x<1+m\}$……………………2分

当$m=2$时，$B=\{x|-1<x<3\}$此时$A\cap B=\{x|1<x<2\}$……………………4分

（2）因为$x\in A$是$x\in B$的充分不必要条件，所以$A\subsetneq B$……………………6分

所以$\begin{cases}1-m\le 1\\1+m\ge 2\end{cases}$……………………8分

经检验m的取值范围为$m\ge 1$.……………………10分

18．解：（1）设公差为$d(d\ne 0)$，$\because a_2,a_4,a_8$成等比数列

$\therefore a_4^2=a_2\cdot a_8$，$\therefore (3d+1)^2=(d+1)(7d+1)$，$\therefore d^2=d$，$\therefore d=1$　$\therefore a_n=n$

（2）由（1）得$a_n=n$，$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$\therefore b_n=\dfrac{2}{n(n+1)}+2^n=2(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})+2^n$

$\therefore T_n=2(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})+\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}$

$\therefore T_n=2(1-\dfrac{1}{n+1})+2^{n+1}-2=2^{n+1}-\dfrac{2}{n+1}$

19. 解：（1）因为$S_n=\dfrac{a_n^2+a_n}{2}$，当$n=1$时，$a_1=1$，

$\because 2S_n=a_n^2+a_n$　$\therefore 2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}(n\ge 2)$

$\therefore 2a_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 + a_n - a_{n-1} \therefore (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1}) = a_n + a_{n-1}$

$\because a_n > 0$，$\therefore a_n + a_{n-1} > 0$（没写的扣一分） $\therefore a_n - a_{n-1} = 1$（常数）

$\therefore \{a_n\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列（不下结论的扣一分） $\therefore a_n = n$

（2）由题得$b_n = (3n-1)\cdot 2^n$

$T_n = 2\times 2^1 + 5\times 2^2 + 8\times 2^3 + \cdots + (3n-1)\cdot 2^n$

$2T_n = \quad 2\times 2^2 + 5\times 2^3 + 8\times 2^4 + \cdots + (3n-1)\cdot 2^{n+1}$

$-T_n = 2\times 2^1 + 3(2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (3n-1)\cdot 2^{n+1}$

$-T_n = 4 + 3\times \dfrac{4(1-2^{n-1})}{1-2} - (3n-1)\cdot 2^{n+1}$

$-T_n = -8 + (4-3n)\cdot 2^{n+1}$ $\quad T_n = 8 + (3n-4)\cdot 2^{n+1}$

20. 解：（1）抛物线C的标准方程为$y^2 = 4x$.

证明（2）由题知直线PM，PN的斜率存在，且不为零，且两直线的斜率互为相反数

设$M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，直线$PM: y = k(x-1) + 2 (k \neq 0)$

由$\begin{cases} y = k(x-1)+2 \\ y^2 = 4x \end{cases}$，得$k^2x^2 - (2k^2 - 4k + 4)x + k^2 - 4k + 4 = 0$,

则$\Delta = (2k^2 - 4k + 4)^2 - 4k^2(k-2)^2 = 16(k-1)^2 > 0$，

又点P在抛物线C上，所以$x_1 = \dfrac{k^2 - 4k + 4}{k^2}$ 同理得$x_2 = \dfrac{k^2 + 4k + 4}{k^2}$.

则$x_1 + x_2 = \dfrac{2k^2 + 8}{k^2}$，$x_1 - x_2 = \dfrac{-8k}{k^2} = \dfrac{-8}{k}$，

$\therefore y_1 - y_2 = [k(x_1 - 1) + 2] - [-k(x_2 - 1) + 2] = k(x_1 + x_2) - 2k = k\cdot \dfrac{2k^2 + 8}{k^2} - 2k = \dfrac{8}{k}$，

$\therefore k_{MN} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{\frac{8}{k}}{\frac{-8}{k}} = -1$，即直线$MN$的斜率为定值-1.

21. 解（1）$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$；

（2）①由$\begin{cases} y=mx+1 \\ x^2-\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 得$(4-m^2)x^2-2mx-5=0$，

由$\Delta=80-16m^2>0$，且$4-m^2\neq 0$得$m^2<5$，且$m^2\neq 4$，

$\therefore -\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$且$m\neq \pm 2$

②设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{4-m^2} \\ x_1\cdot x_2=-\dfrac{5}{4-m^2} \end{cases}$，

$\therefore |AB|=\sqrt{m^2+1}|x_1-x_2|=\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{(\dfrac{2m}{4-m^2})^2-4(-\dfrac{5}{4-m^2})}=\sqrt{m^2+1}\cdot\dfrac{4\sqrt{5-m^2}}{|4-m^2|}$

O点到直线l的距离$d=\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}$，　$\because S_{\triangle ABO}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{2\sqrt{5-m^2}}{|4-m^2|}=2\sqrt{2}$，

$\therefore$ $2m^4-15m^2+27=0$，$\therefore m^2=3$或$\dfrac{9}{2}$，$\therefore m=\pm\sqrt{3}$或$m=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

故所求直线方程为：$y=\pm\sqrt{3}x+1$或$y=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}x+1$

22．．解：（1）由题意可知，$\begin{cases} \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2} \\ 2b=2\sqrt{3} \end{cases}$，又$a^2=b^2+c^2$，所以$a^2=4,b^2=3$，

所以椭圆C的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$…………………………3分

（2）$A(-2,0),B(2,0)$，设$M(x_0,y_0)$，

因为点M在椭圆上，所以$\dfrac{{x_0}^2}{4}+\dfrac{{y_0}^2}{3}=1$ $k_{MA}k_{MB}=\dfrac{y_0}{x_0-2}\bullet\dfrac{y_0}{x_0+2}=\dfrac{{y_0}^2}{{x_0}^2-4}$

又${y_0}^2=3-\dfrac{3{x_0}^2}{4}$，$\therefore k_{MA}k_{MB}=\dfrac{3-\dfrac{3{x_0}^2}{4}}{{x_0}^2-4}=-\dfrac{3}{4}$…………………………7分

（3）设直线 PQ 的方程为：$x=my+1$，$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，则 $S\left(4,y_1\right),T\left(4,y_2\right)$，

联立方程 $\begin{cases}3x^2+4y^2=12\\x=my+1\end{cases}$ 可得：$\left(3m^2+4\right)y^2+6my-9=0$，

所以 $y_1+y_2=-\dfrac{6m}{3m^2+4},y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$， 所以 $2my_1y_2=3\left(y_1+y_2\right)$ ，

又直线 PT 的方程为：$\left(y-y_2\right)\left(x_1-4\right)=\left(x-4\right)\left(y_1-y_2\right)$，

令 $y=0$，

则 $x=\dfrac{4y_2-x_1y_2}{y_1-y_2}+4=\dfrac{4y_1-\left(my_1+1\right)y_2}{y_1-y_2}=\dfrac{8y_1-2y_2-2my_1y_2}{2\left(y_1-y_2\right)}$

$=\dfrac{8y_1-2y_2-3\left(y_1+y_2\right)}{2\left(y_1-y_2\right)}=\dfrac{5\left(y_1-y_2\right)}{2\left(y_1-y_2\right)}=\dfrac{5}{2}$，

所以直线 PT 恒过 $\left(\dfrac{5}{2},0\right)$，

同理，直线 QS 恒过 $\left(\dfrac{5}{2},0\right)$，

即直线 PT 与 QS 交于定点 $\left(\dfrac{5}{2},0\right)$.................................... 12 分