

江苏省仪征中学 2019 届高三考前数学热身练 2

一、填空题

1. 若 $A = \{|a|, a^2\}$, $B = \{0, 2, 4\}$, 且 $A \subseteq B$, 则实数 a 的所有值为_____.
2. 某人随机选看 4 场评分分别为 7.5 分、8.0 分、8.5 分、9.2 分的电影中的 2 场, 则评分最高的 2 场电影至少有 1 场被选中的概率是_____.
3. 若命题 “ $\forall x > 0, x^2 + 2x - 3 + a > 0$ ” 为真命题, 则实数 a 的取值范围为_____.
4. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 75^\circ$, $B = 45^\circ$, $AB = 3\sqrt{2}$, 则边 AC 的长为_____.
5. 已知正四棱锥的底面边长为 2cm, 侧棱与底面成 60° , 则该正四棱锥的侧面积为_____ cm^2 .
6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n > 0$, $a_5 = 1$, 若 $p + q = 10$, 则 $\frac{1}{a_p} + \frac{1}{a_q}$ 的最小值为_____.
7. 已知函数 $f(x) = (\ln x)^2 + m \ln x - 1$, 若对于任意 $x \in [e^m, e^{m+1}]$ (e 为自然对数的底数), 都有 $f(x) < 0$ 成立, 则实数 m 的取值范围是_____.
8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $y = kx + 2 - 2k$ 与曲线 $y = 2(x - 2)^3 + x$ 依次交于 A, B, C 三点, 若点 P 使 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}| = 2$, 则的 $|\overrightarrow{PB}|$ 值为_____.
9. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2^x + 2^{-x}$, 设 $a = f(-\frac{\pi}{12})$, $b = f(\sin \frac{11\pi}{12})$, $c = f(\tan \frac{13\pi}{12})$, 则 a, b, c 从小到大的顺序依次为_____.
10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 C 的半径为 2, 圆心在直线 $l: y = 2x - 1$ 上. 若圆 C 上存在一点 P , 使得直线 $l_1: mx + y + 2 = 0$ 与直线 $l_2: x - my - 2 = 0$ 交于点 P , 则当实数 m 变化时, 圆心 C 的横坐标 a 的取值范围是_____.

二解答题

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $F(c,0)$ 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点, 以 F 为圆心, c 为半径的圆 F 上所有点都在椭圆 C 及其内部.

(1) 求椭圆 C 的离心率 e 的取值范围;

(2) 已知点 $P(-1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上, 线段 PF 与 y 轴的交点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{F_2Q} = \vec{0}$.

①求椭圆 C 的标准方程;

②过 F 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, D 两点 (从左至右), 交圆 F 与 B, C 两点 (从左至右),

若直线 l 的斜率 $k \in [1, 2]$, 求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ 的取值范围.

12. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 2ax^2 + x \ln x$.

(1) 当 $a = \frac{1}{3}$, $x \in [1, e]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域.

(2) 若在区间 $(1, +\infty)$ 上, 不等式 $(a - \frac{1}{2})x^2 + (1 - a^2) \ln x < \frac{f(x)}{x} < \frac{1}{2}x^2$ 恒成立, 试求实数 a 的取值范围.

三附加题

1. 已知点 $P(1, 0)$, 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + 2\cos\theta \\ y = \sqrt{3} + 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程 l 为

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数), 且直线 l 与圆 C 相交于 A, B 两点, 求 $PA \cdot PB$ 的值.

2. 某小组共 10 人, 利用寒假参加义工活动, 已知参加义工活动次数为 1, 2, 3 的人数分别为 3, 3, 4. 现从这 10 人中选出 2 人作为该组代表参加座谈会.

(1) 记“选出 2 人参加义工活动的次数之和为 4”为事件 A , 求事件 A 发生的概率;

(2) 设 X 为选出 2 人参加义工活动次数之差的绝对值, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

江苏省仪征中学 2019 届高考考前数学热身练 2(答案)

一. 填空题

1. ± 2 2. $\frac{5}{6}$ 3. $[3, +\infty)$ 4. $2\sqrt{3}$ 5. $4\sqrt{7}$ 6. $\frac{9}{2}$ 7. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$
8. 1 9. $b < a < c$ 10. $\left[-1, \frac{7}{5}\right]$

二. 解答题

11.

18. 解: (1) 因为椭圆的右顶点 $(a, 0)$ 是椭圆上到右准线距离最短的点, 于是根据椭圆的第二定义知, 右顶点 $(a, 0)$ 也是到右焦点 F 距离最短的点. 由题意可知 $a - c \geq c$, 故离心率 $e = \frac{c}{a} \leq \frac{1}{2}$. 因此椭圆 C 的离心率的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$.

(2) ① 因为 PF 与 y 轴的交点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QF} = \mathbf{0}$, 所以 Q 为 PF 的中点. 设 F_1 为椭圆 C 的左焦点, 则 O 为 F_1F 中点, 所以 $OQ \parallel PF_1$, 于是 $PF_1 \perp x$ 轴. 因为 $P\left(-1, \frac{3}{2}\right)$, 所以 $F_1(-1, 0)$, $F(1, 0)$, 即 $c=1$, 所以 $2a = PF_1 + PF_2 = 4$, 从而 $a=2$, $b^2=3$. 故椭圆的标准方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

② 设直线 l 的斜率为 k , 则 $k \in [1, 2]$, 则直线 l 的方程为 $y = k(x-1)$, 设点 $A(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$. 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = k(x-1) \end{cases}$ 可得 $(3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$, 所以 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2}$, $x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2}$. 由椭圆的第二定义, 得 $\frac{AF_2}{\frac{a^2}{c} - x_1} = e$, 所以 $AF_2 = a - ex_1 = 2 - \frac{1}{2}x_1$. 同理 $DF_2 = a - ex_2 = 2 - \frac{1}{2}x_2$. 因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}| \cos 0 = AB \cdot CD = (AF_2 - 1)(DF_2 - 1)$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \left(2 - \frac{1}{2}x_1 - 1\right)\left(2 - \frac{1}{2}x_2 - 1\right) = \left(1 - \frac{1}{2}x_1\right)\left(1 - \frac{1}{2}x_2\right) = 1 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{4}(x_1x_2) = \frac{k^2}{3+4k^2}$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{k^2}{3+4k^2} = \frac{1}{\frac{3}{k^2} + 4}$. 因为 $k \in [1, 2]$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \in \left[\frac{1}{7}, \frac{4}{19}\right]$.

12. (1) 当 $a = \frac{1}{3}$ 时, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x \ln x$,

因为 $f'(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \ln x + 1 = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9} + \ln x$ 在 $x \in [1, e]$ 上恒正,3 分

所以函数在 $x \in [1, e]$ 为增函数, 所以 $f(1) \leq f(x) \leq f(e)$,

所以 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{3}e^2 + e\right]$5 分

(2) 因为在区间 $(1, +\infty)$ 上, $(a - \frac{1}{2})x^2 + (1 - a^2)\ln x < \frac{f(x)}{x} < \frac{1}{2}x^2$ 恒成立,

而 $f(x) = ax^3 - 2ax^2 + x \ln x$, 故 $\frac{f(x)}{x} = ax^2 - 2ax + \ln x$, 所以由已知得

$$p(x) = ax^2 - 2ax + \ln x - \frac{1}{2}x^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 - 2ax + \ln x < 0 \text{ 对 } x \in (1, +\infty) \text{ 恒成立,}$$

$$h(x) = \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 + (1 - a^2)\ln x - ax^2 + 2ax - \ln x = -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^2 \ln x < 0$$

对 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立,8 分

$$\text{因为 } p'(x) = (2a - 1)x - 2a + \frac{1}{x} = \frac{(x - 1)[(2a - 1)x - 1]}{x},$$

① 若 $a > \frac{1}{2}$, 由 $p'(x) = 0$ 得 $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2a - 1}$;

当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $1 < \frac{1}{2a - 1}$, 所以 $p(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2a - 1}, +\infty\right)$ 上单调递增, 不合题意;

当 $a \geq 1$ 时, $\frac{1}{2a - 1} < 1$, 所以 $p(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 不合题意;10 分

② 若 $a \leq \frac{1}{2}$, 则在 $(1, +\infty)$ 上 $p'(x) < 0$ 恒成立, 即 $p(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

若 $p(x) < 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 只需最大值 $p(1) = -a - \frac{1}{2} \leq 0$,

所以 $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$;12 分

又因为 $h'(x) = -x + 2a - \frac{a^2}{x} = \frac{-(x - a)^2}{x} \leq 0$, $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

若 $h(x) < 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 只需最大值 $h(1) = -\frac{1}{2} + 2a \leq 0$, 所以 $a \leq \frac{1}{4}$,14 分

综上所述, a 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$16 分

三. 附加题

B. 解: 圆的方程为 $(x - 1)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 4$, 代入直线的参数方程 $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = \sqrt{3}t, \end{cases}$ 得 $4t^2 - 6t - 1 = 0$. 设方程的两根为 t_1, t_2 , 则 $t_1 t_2 = -\frac{1}{4}$, 所以 $PA \cdot PB = 4 \times |t_1 t_2| = 4 \times \frac{1}{4} = 1$.

2.解：（1）由已知有 $P(A) = \frac{C_3^1 \cdot C_4^1 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$,

所以事件 A 的发生的概率为 $\frac{1}{3}$; ... (3 分)

（2）随机变量 X 的所有可能的取值为 0, 1, 2; (4 分)

$$P(X=0) = \frac{C_3^2 + C_3^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{4}{15};$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 \cdot C_3^1 + C_3^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15};$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{4}{15}; \quad \text{..... (6 分)}$$

所以随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$

..... (8 分)

数学期望为 $EX = 0 \times \frac{4}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{4}{15} = 1$ (10 分)