数列（二）

例题讲解：

例 1　设$f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$，则$f\left(\dfrac{1}{11}\right)+f\left(\dfrac{2}{11}\right)+f\left(\dfrac{3}{11}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{10}{11}\right)=$__________.

例 2．等比数列$\{a_n\}$中．a_1，a_2，a_3分别是下表第一、二、三行中的某一个数．且a_1，a_2，a_3中的任何两个数不在下表的同一列.

	第一列	第二列	第三列
第一行	3	2	10
第二行	6	4	14
第三行	9	8	18

（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（II）如数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n+(-1)^n lna_n$，求数列b_n的前n项和S_n.

例 3．已知首项为$\dfrac{3}{2}$的等比数列$\{a_n\}$不是递减数列，其前n项和为$S_n(n\in N^*)$，且S_3+a_3，S_5+a_5，S_4+a_4成等差数列．（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）设$b_n=(-1)^{n+1}\bullet n(n\in N^*)$，求数列$\{a_n\bullet b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

例 4　已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=-1$，$a_2=2$，满足$S_{n+1}=3S_n-2S_{n-1}-a_{n-1}+2(n\quad 2)$

(1) 求证：数列$\{a_n - a_{n-1}\}$为等差数列；

(2) 求证：$\frac{1}{a_n+1}+\frac{1}{a_{n-1}+1}+\ldots\frac{1}{a_2+1}<\frac{3}{4}$.

例 5．已知正数数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$a_n=(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})(n\quad 2$，$n\in N^*)$，$a_1=1$.

(I) 求证：$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列；(II) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(III) 令$b_n=\frac{4n}{a_n^2 \bullet a_{n+1}^2}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求使得$T_n<\frac{m}{10}$对于所有$n\in N*$都成立的最小正整数$m$.

例 6．已知正项等差数列$\{a_n\}$满足：$S_n{}^2=a_1{}^3+a_2{}^3+\ldots+a_n{}^3$，其中$S_n$是数列$\{a_n\}$的前$n$项和.

(I) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(II) 令$b_n=(-1)^{n-1}\frac{4n}{(2a_n-1)(2a_n+1)}$，证明：$b_1+b_2+\ldots+b_n\quad \frac{2n+2}{2n+1}$.

巩固练习：

1．已知$S_n=2-4+6-8+10-12+\cdots+\left(-1\right)^n\cdot 2n$，则$S_{15}+S_{20}-S_{50}=$__________.，

2.计算：$\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 88^\circ+\sin^2 89^\circ=$____.

3.设$f(x)=\dfrac{1}{2^x+\sqrt{2}}$，利用课本中推导等差数列的前$n$项和的公式的方法，可求得$f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+\cdots+f(5)+f(6)$的值为：　　　　.

4. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，且$4S_n$，$3S_{n+1}$，$2S_{n+2}$成等差数列.

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若数列$\{b_n\}$满足$b_1=0$，$b_{n+1}-b_n=1$，设$c_n=\begin{cases}a_n, n为奇数\\ b_n, n为偶数\end{cases}$，求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和.

5. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=qa_n(q为实数，且q\neq 1)$，$n\in N^*$，$a_1=1$，$a_2=2$，且$a_2+a_3$，$a_3+a_4$，$a_4+a_5$成等差数列

(1) 求q的值和$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设$b_n=\dfrac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}$，$n\in N^*$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和.

6. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$且$\frac{1}{1-a_{n+1}}-\frac{1}{1-a_n}=1$.

(I) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(II) 设$b_n=\frac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}$，记$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$，证明：$S_n<1$.

7. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知公差$d=2$，a_2是a_1与a_4的等比中项.

(I) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(II) 设$b_n=a_{\frac{n(n+1)}{2}}$，记$T_n=-b_1+b_2-b_3+b_4-\ldots+(-1)^n b_n$，求$T_n$.

答案

例 1　设$f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$，则$f\left(\dfrac{1}{11}\right)+f\left(\dfrac{2}{11}\right)+f\left(\dfrac{3}{11}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{10}{11}\right)=$________.

【解析】本题考点是倒序相加求和的具体运用.

$\because f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$，$\therefore f(1-x)=\dfrac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\dfrac{2}{2+4^x}$，

$\therefore f(x)+f(1-x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{2}{2+4^x}=1.$

设$S=f\left(\dfrac{1}{11}\right)+f\left(\dfrac{2}{11}\right)+f\left(\dfrac{3}{11}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{10}{11}\right)$

$S=f\left(\dfrac{10}{11}\right)+f\left(\dfrac{9}{11}\right)+f\left(\dfrac{8}{11}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{1}{11}\right)$

两式相加可得$2S=\left[f\left(\dfrac{10}{11}\right)+f\left(\dfrac{1}{11}\right)\right]+\left[f\left(\dfrac{9}{11}\right)+f\left(\dfrac{2}{11}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\dfrac{1}{11}\right)+f\left(\dfrac{10}{11}\right)\right]$

$2S=10$，

$\therefore S=5$.

例 2．等比数列$\{a_n\}$中．a_1，a_2，a_3分别是下表第一、二、三行中的某一个数．且a_1，a_2，a_3中的任何两个数不在下表的同一列.

	第一列	第二列	第三列
第一行	3	2	10
第二行	6	4	14
第三行	9	8	18

(I) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(II) 如数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n+(-1)^n \ln a_n$，求数列b_n的前n项和S_n.

解：(I) 当 $a_1=3$ 时，不合题意

当 $a_1=2$ 时，当且仅当 $a_2=6$，$a_3=18$ 时符合题意

当 $a_1=10$ 时，不合题意

因此 $a_1=2$，$a_2=6$，$a_3=18$，所以 $q=3$，

所以 $a_n=2\bullet 3^{n-1}$.

(II) $b_n=a_n+(-1)^n lna_n$

$=2\bullet 3^{n-1}+(-1)^n[(n-1)ln3+ln2]$

$=2\bullet 3^{n-1}+(-1)^n(ln2-ln3)+(-1)^n nln3$

所以 $S_n=2(1+3+\ldots+3^{n-1})+[-1+1-1+1+\ldots+(-1)^n](ln2-ln3)+[-1+2-3+4-\ldots+(-1)^n n]ln3$

所以当 n 为偶数时，$S_n=2\times\dfrac{1-3^n}{1-3}+\dfrac{n}{2}ln3=3^n+\dfrac{n}{2}ln3-1$

当 n 为奇数时，$S_n=2\times\dfrac{1-3^n}{1-3}-(ln2-ln3)+(\dfrac{n-1}{2}-n)ln3=3^n-\dfrac{n-1}{2}ln3-ln2-1$

综上所述 $S_n=\begin{cases}3^n+\dfrac{n}{2}ln3-1 & n\text{为偶数}\\ 3^n-\dfrac{n-1}{2}ln3-ln2-1 & n\text{为奇数}\end{cases}$

例 3. 已知首项为 $\dfrac{3}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 不是递减数列，其前 n 项和为 $S_n(n\in N^*)$，且 S_3+a_3，S_5+a_5，S_4+a_4 成等差数列.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 设 $b_n=(-1)^{n+1}\bullet n(n\in N^*)$，求数列 $\{a_n\bullet b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

1 解：(I) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

由S_3+a_3，S_5+a_5，S_4+a_4成等差数列，可得

$2(S_5+a_5)=S_3+a_3+S_4+a_4$，

即$2(S_3+a_4+2a_5)=2S_3+a_3+2a_4$，

即有$4a_5=a_3$，即为$q^2=\frac{a_5}{a_3}=\frac{1}{4}$，

解得$q=\pm\frac{1}{2}$，

由等比数列$\{a_n\}$不是递减数列，可得$q=-\frac{1}{2}$，

即$a_n=\frac{3}{2}\bullet(-\frac{1}{2})^{n-1}=(-1)^{n-1}\bullet\frac{3}{2^n}$；

（II）$b_n=(-1)^{n+1}\bullet n$，

可得$a_n\bullet b_n=(-1)^{n-1}\bullet\frac{3}{2^n}\bullet(-1)^{n+1}\bullet n=3n\bullet(\frac{1}{2})^n$．

前n项和$T_n=3[1\bullet\frac{1}{2}+2\bullet(\frac{1}{2})^2+\ldots+n\bullet(\frac{1}{2})^n]$，

$\frac{1}{2}T_n=3[1\bullet(\frac{1}{2})^2+2\bullet(\frac{1}{2})^3+\ldots+n\bullet(\frac{1}{2})^{n+1}]$，

两式相减可得，$\frac{1}{2}T_n=3[\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\ldots+(\frac{1}{2})^n-n\bullet(\frac{1}{2})^{n+1}]$

$=3[\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-n\bullet(\frac{1}{2})^{n+1}]$，

化简可得$T_n=6(1-\frac{n+2}{2^{n+1}})$．

例 4 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=-1$，$a_2=2$，满足$S_{n+1}=3S_n-2S_{n-1}-a_{n-1}+2(n\quad 2)$

(1) 求证：数列$\{a_n-a_{n-1}\}$为等差数列；

(2) 求证：$\dfrac{1}{a_n+1}+\dfrac{1}{a_{n-1}+1}+\ldots\dfrac{1}{a_2+1}<\dfrac{3}{4}$.

证明：(1) $\because S_{n+1}=3S_n-2S_{n-1}-a_{n-1}+2(n\quad 2)$

$\therefore S_{n+1}-S_n=2(S_n-S_{n-1})-a_{n-1}+2$

$\therefore a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}+2$

$\therefore (a_{n+1}-a_n)-(a_n-a_{n-1})=2$，

$\because a_1=-1$，$a_2=2$，

$\therefore a_2-a_1=3$，

$\therefore$数列$\{a_n-a_{n-1}\}$是以 3 为首项，2 为公差的等差数列；

(2) 由 (1) $a_n-a_{n-1}=2n-1$，

利用叠加法可得$a_n-a_1=3+\ldots+(2n-1)=(n-1)(n+1)$，

$\therefore a_n+1=(n-1)(n+1)$，

$\therefore \dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1})$，

$\therefore \dfrac{1}{a_n+1}+\dfrac{1}{a_{n-1}+1}+\ldots+\dfrac{1}{a_2+1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n}+\ldots+1-\dfrac{1}{3})<\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{4}$.

例 5. 已知正数数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$a_n=(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})(n\quad 2$，$n\in N^*)$，$a_1=1$.

(I) 求证：$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列；

(II) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(III) 令$b_n=\dfrac{4n}{a_n^2 \bullet a_{n+1}^2}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求使得$T_n<\dfrac{m}{10}$对于所有$n\in N^*$都成立的最小正整数$m$.

(I)证明：$\because a_n=(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})(n\quad 2$，$n\in N^*)$，

$\therefore S_n-S_{n-1}=(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})(n\quad 2$，$n\in N^*)$，

又正数数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$\therefore \sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}>0$.

$\therefore \sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1$，

$\therefore \{\sqrt{S_n}\}$是等差数列，公差为1，首项为1.

(II)解：由(I)可得：$\sqrt{S_n}=1+(n-1)=n$，

$\therefore S_n=n^2$.

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.

(III)解：$b_n=\dfrac{4n}{a_n^2 \bullet a_{n+1}^2}=\dfrac{4n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{(2n+1)^2}]$，

$\therefore$数列$\{b_n\}$的前n项和为$T_n=\dfrac{1}{2}[(1-\dfrac{1}{3^2})+(\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{5^2})+\ldots+(\dfrac{1}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{(2n+1)^2})]$

$=\dfrac{1}{2}[1-\dfrac{1}{(2n+1)^2}]<\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$使得$T_n<\dfrac{m}{10}$对于所有$n\in N^*$都成立，则$\dfrac{1}{2}\quad \dfrac{m}{10}$，解得$m\quad 5$.

因此使得$T_n<\dfrac{m}{10}$对于所有$n\in N^*$都成立的最小正整数$m=5$.

例6. 已知正项等差数列$\{a_n\}$满足：$S_n{}^2=a_1{}^3+a_2{}^3+\ldots+a_n{}^3$，其中$S_n$是数列$\{a_n\}$的前$n$项和.

(I) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(II) 令$b_n=(-1)^{n-1}\dfrac{4n}{(2a_n-1)(2a_n+1)}$，证明：$b_1+b_2+\ldots+b_n\quad \dfrac{2n+2}{2n+1}$.

解：(I) 依题意$\begin{cases} S_1^{\ 2}=a_1^{\ 3} \\ S_2^{\ 2}=a_1^{\ 3}+a_2^{\ 3} \end{cases}$，

数列$\{a_n\}$为正项等差数列，所以$a_1=1$，

所以$(1+a_2)^2=1+a_2^{\ 3}$，整理得：$a_2(a_2+1)(a_2-2)=0$，

所以$a_2=2$，或$a_2=0$ (舍)或$a_2=-1$ (舍)

所以数列$\{a_n\}$的公差$d=2-1=1$，

所以$a_n=1+(n-1)\times 1=n$；

(II) 证明：$b_n=(-1)^{n-1}\dfrac{4n}{(2a_n-1)(2a_n+1)}=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}-(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$，

$\therefore b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots+b_n=(1+\frac{1}{3})+(-\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{7})+\ldots\ldots+((-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}-(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$，)

$=1-(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}\quad 1+\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{2n+2}{2n+1}$，

命题得证.

巩固练习：

1．已知$S_n=2-4+6-8+10-12+\cdots+\left(-1\right)^n\cdot 2n$

则$S_{15}+S_{20}-S_{50}=$__________.

$\because S_{15}=2-4+6-8+10-12+\cdots+26-28+30$

$=(2-4)+(6-8)+(10-12)+\cdots+(26-28)+30$

$=(-2)\times 7+30=16$

$S_{20}=2-4+6-8+10-12+\cdots+38-40$

$=(2-4)+(6-8)+(10-12)+\cdots+(38-40)$

$=(-2)\times 10\quad =-20$

同理 $S_{50}=(-2)\times 25=-50$

$\therefore S_{15}+S_{20}-S_{50}=16+(-20)-(-50)\ =46$.

2.计算：$\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 88^\circ+\sin^2 89^\circ=$ ____.

因为：$\sin^2\alpha+\sin^2(90^\circ-\alpha)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

设$S=\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 88^\circ+\sin^2 89^\circ$

$S=\sin^2 89^\circ+\sin^2 88^\circ+\cdots+\sin^2 3^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 1^\circ$

从而，$2S=(\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ)+\cdots+(\sin^2 88^\circ+\sin^2 2^\circ)+(\sin^2 89^\circ+\sin^2 1^\circ)=89$.

所以$S=\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 88^\circ+\sin^2 89^\circ=\dfrac{89}{2}$.

【答案】$\dfrac{89}{2}$

3.设$f(x)=\dfrac{1}{2^x+\sqrt{2}}$，利用课本中推导等差数列的前$n$项和的公式的方法，可求得$f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+\cdots+f(5)+f(6)$的值为：______.

【解析】本题考点是倒序相加求和的具体运用.

因为$f(x)=\dfrac{1}{2^x+\sqrt{2}}$，所以$f(1-x)=\dfrac{1}{2^{1-x}+\sqrt{2}}=\dfrac{2^x}{2+\sqrt{2}\cdot 2^x}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2^x}{\sqrt{2}+2^x}$

$$f(x)+f(1-x)=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2^x}{2^x+\sqrt{2}}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2^x}{2^x+\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+2^x)}{2^x+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

设$S=f(-5)+f(-4)+\cdots+f(6)$，则$S=f(6)+f(5)+\cdots+f(-5)$

所以：$2S=(f(6)+f(-5))+\cdots+(f(-5)+f(6))=6\sqrt{2}$

即：$S=f(-5)+f(-4)+\cdots+f(6)=3\sqrt{2}$.

【答案】$3\sqrt{2}$

4. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，且$4S_n$，$3S_{n+1}$，$2S_{n+2}$成等差数列.

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若数列$\{b_n\}$满足$b_1=0$，$b_{n+1}-b_n=1$，设$c_n=\begin{cases}a_n, n\text{为奇数}\\ b_n, n\text{为偶数}\end{cases}$，求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和.

解：(1) 由$4S_n$，$3S_{n+1}$，$2S_{n+2}$成等差数列，

可得$6S_{n+1}=4S_n+2S_{n+2}$，即$3S_{n+1}=2S_n+S_{n+2}$，

即$2(S_{n+1}-S_n)=S_{n+2}-S_{n+1}$，

即$2a_{n+1}=a_{n+2}$，所以等比数列$\{a_n\}$的公比为 2，

又$a_1=1$，可得$a_n=2^{n-1}$，$n\in N*$；

(2) 由$b_1=0$，$b_{n+1}-b_n=1$，可得$\{b_n\}$是首项为 0，公差为 1 的等差数列，

则$b_n=n-1$，$n\in N*$，

$c_n=\begin{cases}a_n,n为奇数\\b_n,n为偶数\end{cases}=\begin{cases}2^{n-1},n为奇数\\n-1,n为偶数\end{cases}$，

所以$\{c_n\}$的前$2n$项和为$c_1+c_2+\ldots+c_{2n}=(a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1})+(b_2+b_4+\ldots+b_{2n})$

$=(1+4+16+\ldots+2^{2n-2})+(1+3+\ldots+2n-1)$

$=\dfrac{1-4^n}{1-4}+\dfrac{1+2n-1}{2}\bullet n=\dfrac{4^n}{3}-\dfrac{1}{3}+n^2$.

5. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=qa_n(q$为实数，且$q\neq1)$，$n\in N^*$，$a_1=1$，$a_2=2$，且a_2+a_3，a_3+a_4，a_4+a_5成等差数列

(1) 求q的值和$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设$b_n=\dfrac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}$，$n\in N^*$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和.

解：(1) $\because a_{n+2}=qa_n(q$为实数，且$q\neq1)$，$n\in N^*$，$a_1=1$，$a_2=2$，

$\therefore a_3=q$，$a_5=q^2$，$a_4=2q$，

又$\because a_2+a_3$，a_3+a_4，a_4+a_5成等差数列，

$\therefore 2\times 3q=2+3q+q^{2}$，

即$q^{2}-3q+2=0$，

解得$q=2$或$q=1$（舍），

$\therefore a_{n}=\begin{cases}2^{\frac{n-1}{2}}, & n\text{为奇数}\\ 2^{\frac{n}{2}}, & n\text{为偶数}\end{cases}$；

(2) 由 (1) 知$b_{n}=\dfrac{\log_{2}a_{2n}}{a_{2n-1}}=\dfrac{log_{2}2^{n}}{2^{n-1}}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$， $n\in N^{*}$ ，

记数列$\{b_{n}\}$的前n项和为T_{n}，

则$T_{n}=1+2\bullet\dfrac{1}{2}+3\bullet\dfrac{1}{2^{2}}+4\bullet\dfrac{1}{2^{3}}+\ldots+(n-1)\bullet\dfrac{1}{2^{n-2}}+n\bullet\dfrac{1}{2^{n-1}}$，

$\therefore 2T_{n}=2+2+3\bullet\dfrac{1}{2}+4\bullet\dfrac{1}{2^{2}}+5\bullet\dfrac{1}{2^{3}}+\ldots+(n-1)\bullet\dfrac{1}{2^{n-3}}+n\bullet\dfrac{1}{2^{n-2}}$，

两式相减，得$T_{n}=3+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^{2}}+\dfrac{1}{2^{3}}+\ldots+\dfrac{1}{2^{n-2}}-n\bullet\dfrac{1}{2^{n-1}}$

$=3+\dfrac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^{n-2}]}{1-\frac{1}{2}}-n\bullet\dfrac{1}{2^{n-1}}$

$=3+1-\dfrac{1}{2^{n-2}}-n\bullet\dfrac{1}{2^{n-1}}$

$=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$.

6. 设数列$\{a_{n}\}$满足$a_{1}=0$且$\dfrac{1}{1-a_{n+1}}-\dfrac{1}{1-a_{n}}=1$.

(I) 求$\{a_{n}\}$的通项公式；

(II) 设$b_{n}=\dfrac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}$，记$S_{n}=\sum\limits_{k=1}^{n}b_{k}$，证明：$S_{n}<1$.

解：(I) $\{\dfrac{1}{1-a_{n}}\}$是公差为 1 的等差数列，

$\frac{1}{1-a_n}=\frac{1}{1-a_1}+(n-1)\times 1=n$，

$\therefore a_n=\frac{n-1}{n}(n\in N^*)$．

（II）$b_n=\frac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}=\frac{1-\sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，

$\therefore S_n=(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}})+\ldots+(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}<1$．

7. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知公差$d=2$，a_2是a_1与a_4的等比中项.

（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）设$b_n=a_{\frac{n(n+1)}{2}}$，记$T_n=-b_1+b_2-b_3+b_4-\ldots+(-1)^n b_n$，求$T_n$．

解：（I）$\because a_2$是a_1与a_4的等比中项,

$\therefore a_2^2=a_1a_4$，

$\because$在等差数列$\{a_n\}$中，公差$d=2$，

$\therefore (a_1+d)^2=a_1(a_1+3d)$，即$(a_1+2)^2=a_1(a_1+3\times 2)$，

化为$2a_1=2^2$，解得$a_1=2$．

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times 2=2n$．

（II）$\because b_n=a_{\frac{n(n+1)}{2}}=n(n+1)$，

$\therefore T_n=-b_1+b_2-b_3+b_4-\ldots+(-1)^n b_n=-1\times(1+1)+2\times(2+1)-\ldots+(-1)^n n\bullet(n+1)$．

当$n=2k(k\in N^*)$时，$b_{2k}-b_{2k-1}=2k(2k+1)-(2k-1)(2k-1+1)=4k$

$T_n=(b_2-b_1)+(b_4-b_3)+\ldots+(b_{2k}-b_{2k-1})$

$=4(1+2+\ldots+k)=4\times\frac{k(k+1)}{2}=2k(k+1)=\frac{n(n+2)}{2}$．

当$n=2k-1(k\in N^*)$时,

$$T_n=(b_2-b_1)+(b_4-b_3)+\ldots+(b_{2k-2}-b_{2k-3})-b_{2k-1}$$

$$=\frac{(n-1)(n+1)}{2}-n(n+1)$$

$$=-\frac{(n+1)^2}{2}.$$

故$T_n=\begin{cases}\frac{n(n+2)}{2},n=2k(k\in N*)\\-\frac{(n+1)^2}{2},n=2k-1(k\in N*)\end{cases}$.

（也可以利用“错位相减法”）