

高一数学小练 (21)

姓名: _____ 班级: _____ 学号: _____

一、选择题 (本大题共 6 小题, 共 30.0 分)

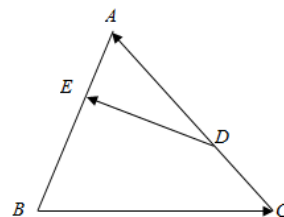
1. 已知函数 $y=f(x)$ 定义域是 $[-2, 3]$, 则 $y=f(2x-1)$ 的定义域是 ()
 A. $[0, \frac{5}{2}]$ B. $[-1, 4]$ C. $[-\frac{1}{2}, 2]$ D. $[-5, 5]$
2. 设集合 $M=\{x|x^2=x\}$, $N=\{x|\lg x \leq 0\}$, 则 $M \cup N =$ ()
 A. $[0, 1]$ B. $(0, 1]$ C. $[0, 1)$ D. $(-\infty, 1]$
3. 已知 $3^m=5^n=k$ 且 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2$, 则 k 的值为 ()
 A. 5 B. $\sqrt{15}$ C. $\sqrt{5}$ D. 225
4. 函数 $f(x) = \frac{2mx-3}{\sqrt{mx^2+mx+1}}$ 的定义域为 R , 则实数 m 的取值范围是 ()
 A. $(0, 4)$ B. $[0, 4)$ C. $[0, 4]$ D. $(0, 4]$
5. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π , 若其图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到的函数为奇函数, 则函数 $f(x)$ 的图象 ()
 A. 关于点 $(\frac{7\pi}{12}, 0)$ 对称 B. 关于点 $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称
 C. 关于直线 $x = -\frac{\pi}{12}$ 对称 D. 关于直线 $x = \frac{7\pi}{12}$ 对称
6. 设函数 $f(x) = \ln(1+|x|) - \frac{1}{1+x^2}$, 则使得 $f(x) > f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是 ()
 A. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$ B. $(\frac{1}{3}, 1)$
 C. $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ D. $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

二、填空题 (本大题共 3 小题, 共 15.0 分)

7. 若扇形的周长为 16cm , 圆心角为 2rad , 则该扇形的面积为 _____ cm^2 .
8. 下面五个命题,

- ① 已知角 α 终边上一点 $P(-4, 3)$, 则 $\sin\alpha + \tan\alpha = \frac{3}{20}$.
- ② 终边在 y 轴上角的集合 $\{\alpha | \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.
- ③ 把函数 $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可以得到 $y = \cos 2x$ 的图象.
- ④ 函数 $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增.
- ⑤ 函数 $y = \tan(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图像关于点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 成中心对称图形.

其中真命题的序号是 _____.



9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{CD}{DA} = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}$, 记 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{ED} =$ _____ (用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示).

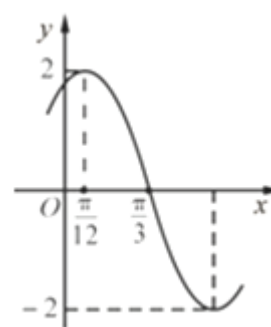
三、解答题（本大题共 3 小题，共 36.0 分）

10. 已知角 α 的终边在直线 $y = -\sqrt{3}x$ 上，

- (1) 求 $\tan\alpha$ ，并写出与 α 终边相同的角的集合 S ； (2) 求值： $\frac{\sqrt{3}\sin(\alpha-\pi)+5\cos(2\pi-\alpha)}{-\sqrt{3}\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)+\cos(\pi+\alpha)}$.

11. 如图为函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$) 的部分图象.

- (1) 求函数解析式；
(2) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；
(3) 若方程 $f(x) = m$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上有两个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围.



12. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 2ax + 1 - a$,

- (1) 若 $a = 2$ ，求 $f(x)$ 在区间 $[0, 3]$ 上的最小值；
(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有最大值 3，求实数 a 的值.

答案和解析

1. 【答案】C

【解析】

【分析】

本题主要考查函数定义域的求解，根据复合函数定义域之间的关系解不等式是解决本题的关键，是基础题.

根据复合函数定义域之间的关系即可得到结论.

【解答】

解： $\because$ 函数 $y=f(x)$ 定义域是 $[-2, 3]$,

$\therefore$ 由 $-2 \leq 2x-1 \leq 3$,

解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$,

即函数的定义域为 $[-\frac{1}{2}, 2]$,

故选 C.

2. 【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查了并集及其运算，考查了对数不等式的解法，是基础题. 求解一元二次方程化简 M,

求解对数不等式化简 N, 然后利用并集运算得答案.

【解答】

解：由 $M=\{x|x^2=x\}=\{0, 1\}$,

$N=\{x|\lg x \leq 0\}=(0, 1]$,

得 $M \cup N = \{0, 1\} \cup (0, 1] = [0, 1]$.

故选 A.

3. 【答案】B

【解析】

【分析】

本题主要考查对数的运算性质、以及换底公式的应用，同时考查了运算求解能力.

先根据指数式与对数式互化关系表示出 m、n, 然后代入 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2$, 利用对数的运算性质求解.

【解答】

解： $\because 3^m = 5^n = k > 0$,

$$\therefore m = \log_3 k, n = \log_5 k,$$

$$\text{则 } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{\log_3 k} + \frac{1}{\log_5 k} = \log_k 3 + \log_k 5 = \log_k 15 = 2,$$

$$\therefore k = \sqrt{15}.$$

故选 B.

4. 【答案】 B

【解析】

【分析】

本题主要考查了对数函数的定义域, 考查了含有参数的不等式恒成立问题, 由于含有参数需要进行分类讨论, 属于中档题本题易忘记讨论 $m=0$ 的情况导致漏解.

【解答】

解: $\because$ 函数 $f(x) = \frac{2mx-3}{\sqrt{mx^2+mx+1}}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$,

$\therefore mx^2+mx+1 > 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立,

①当 $m=0$ 时, 有 $1 > 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立, 故符合条件;

②当 $m \neq 0$ 时, 由 $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta = m^2 - 4m < 0 \end{cases}$, 解得 $0 < m < 4$,

综上, 实数 m 的取值范围是 $[0, 4)$.

故选 B.

5. 【答案】 C

【解析】

【分析】

本题主要考查函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律, 正弦函数的图象的对称性, 属于基础题.

利用函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律, 正弦函数的图象的对称性, 得出结论.

【解答】

解: $\because$ 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, $\therefore \omega = 2$.

若其图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到的函数为 $y = \sin[2(x + \frac{\pi}{6}) + \varphi] = \sin(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi)$,

再根据 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi)$ 为奇函数, $\therefore \frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 即 $\varphi = k\pi - \frac{\pi}{3}$, 可取 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

故 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

当 $x = \frac{7\pi}{12}$ 时, $f(x) = \frac{1}{2} \neq 0$, 且 $f(x) = \frac{1}{2}$ 不是最值, 故 $f(x)$ 的图象不关于点 $(\frac{7\pi}{12}, 0)$ 对称, 也不关于直线 $x = \frac{7\pi}{12}$ 对称, 故排除 A、D;

故 $x = -\frac{\pi}{12}$ 时, $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, 是函数的最大值, 故 $f(x)$ 的图象不关于点 $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称, 但关于直线 $x = -\frac{\pi}{12}$ 对称,

故选 C.

6. 【答案】 B

【解析】

【分析】

本题主要考查函数奇偶性和单调性的应用, 综合考查函数性质的综合应用, 运用偶函数的性质是解题的关键.

根据函数的奇偶性和单调性之间的关系, 将不等式进行转化即可得到结论.

【解答】

解: $\because$ 函数 $f(x) = \ln(1+|x|) - \frac{1}{1+x^2}$ 为偶函数,

且在 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2}$,

导数为 $f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0$,

即有函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore f(x) > f(2x-1)$ 等价于 $f(|x|) > f(|2x-1|)$,

即 $|x| > |2x-1|$,

平方得 $3x^2 - 4x + 1 < 0$,

解得: $\frac{1}{3} < x < 1$,

所求 x 的取值范围是 $(\frac{1}{3}, 1)$.

故选 B.

7. 【答案】 16

【解析】

【分析】

设扇形的半径为 r , 弧长为 l , 根据扇形周长和弧长公式列式, 解之得 $r=4$, $l=8$, 再由扇形面积公式可得扇形的面积 S . 本题给出扇形的周长和圆心角的大小, 求扇形的面积, 着重考查了扇形

的面积公式和弧长公式等知识, 属于基础题.

【解答】

解 设扇形的半径为 r , 弧长为 l , 则有 $\begin{cases} 2r+l=16 \\ l=2r \end{cases}$, 得 $r=4$, $l=8$,

故扇形的面积为 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$.

故答案为 16.

8. 【答案】③⑤

【解析】

【分析】

本题考查命题的真假判断与应用, 三角函数的定义, 着重考查三角函数的恒等变换与图象变换, 考查正弦函数、正切函数的周期性、余弦函数的单调性的应用, 熟练掌握三角函数的图象与性质是关键, 属于中档题.

【解答】

解: ①已知角 α 终边上一点 $P(-4, 3)$, 由三角函数的定义可得 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$, 则

$\sin\alpha+\tan\alpha=-\frac{3}{20}$, 故错误.

②终边在 y 轴上角的集合应为 $\{\alpha|\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\}$, 故错误.

③把函数 $y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可以得到 $y=\cos 2x$ 的图象, 故正确.

④函数 $y=\cos(x+\frac{\pi}{2})$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$, 当 $x=0$ 时, $y=\cos(0+\frac{\pi}{2})=0$, 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时, $y=\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=-1$ 显然不是递增的, 故错误.

⑤函数 $y=\tan(2x+\frac{\pi}{3})$, 带入 $\frac{\pi}{12}$ 得 $y=\tan(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3})$ 无意义, 故图像关于点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 成中心对称图形, 故正确.

其中真命题的序号是③⑤.

故答案为③⑤.

9. 【答案】 $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{3}$

【解析】

解: $\triangle ABC$ 中, $\frac{CD}{DA} = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}$,

且 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{3} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) - \frac{2}{3} \overrightarrow{CA}$$

$$= \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{CA}$$

$$= \frac{\vec{a} - \vec{b}}{3}.$$

故答案为: $\frac{\vec{a} - \vec{b}}{3}$.

根据平面向量的线性运算法则, 用 $\overrightarrow{BC}$ 、 $\overrightarrow{CA}$ 表示出 $\overrightarrow{ED}$ 即可.

本题考查了平面向量的线性运算与线性表示的应用问题, 是基础题目.

10. 【答案】解: (1) $\because$ 角 α 的终边在直线 $y = -\sqrt{3}x$ 上,

$\therefore \tan \alpha = -\sqrt{3}$, 与 α 终边相同的角的集合 $S = \{\alpha | \alpha = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, \text{ 或 } \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}, \}$,

即 $S = \{\alpha | \alpha = k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$(2) \frac{\sqrt{3}\sin(\alpha-\pi)+5\cos(2\pi-\alpha)}{-\sqrt{3}\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)+\cos(\pi+\alpha)} = \frac{-\sqrt{3}\sin\alpha+5\cos\alpha}{-\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}\tan\alpha+5}{-\sqrt{3}\tan\alpha-1} = \frac{\sqrt{3}\tan\alpha-5}{\sqrt{3}\tan\alpha+1} = 4.$$

【解析】

本题主要考查任意角的三角函数的定义, 终边相同的角的表达方式, 同角三角函数的基本关系、诱导公式的应用, 属于基础题.

(1) 利用任意角的三角函数的定义, 求得 $\tan \alpha$ 的值, 再根据终边相同的角的表达方式求得与 α 终边相同的角的集合 S .

(2) 利用同角三角函数的基本关系、诱导公式, 求得所给式子的值.

11. 【答案】解: (1) 由题中的图象知, $A=2$, $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$, 即 $T=\pi$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

根据五点作图法, 令 $2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 得到 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

解析式为 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$.

(2) 令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, 解得 $k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}$, $k \in \mathbb{Z}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}]$, $k \in \mathbb{Z}$.

(3) 由 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的图象如图知, 当 $m \in (-2, -\sqrt{3}]$ 上有两个不同的实根.

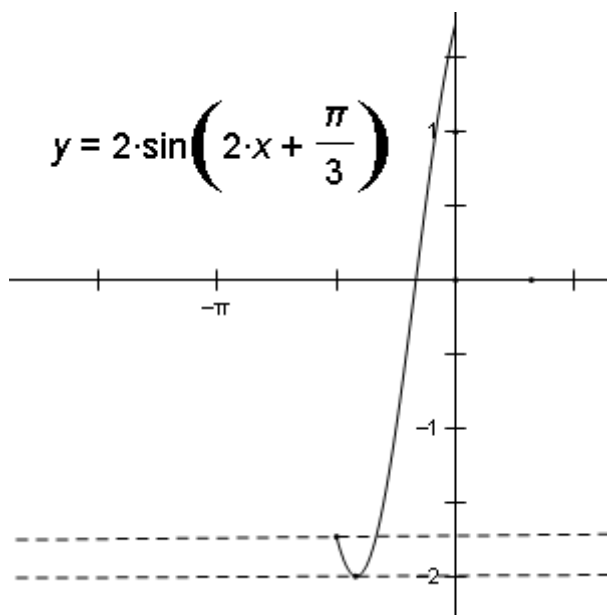
【解析】

本题考查了由三角函数图象求解析式以及利用正弦函数的性质求单调区间以及数形结合求参数范围; 熟练掌握三角函数的图象和性质是解答的关键; 属于中档题.

(1) 由已知图象求出振幅、周期和相位, 对的解析式;

(2) 由(1)的解析式, 结合正弦函数的性质求单调增区间;

(3) 利用数形结合求满足条件的 m 的范围.



12. 【答案】解: (1) 若 $a=2$, 则 $f(x) = -x^2 + 4x - 1 = -(x-2)^2 + 3$, 函数图象开口向下, 对称轴为 $x=2$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上是增函数的, 在区间 $[2, 3]$ 上是减函数的, 又 $f(0) = -1$, $f(3) = 2$

$\therefore f(x)_{\min} = f(0) = -1$

(2) 对称轴为 $x=a$

当 $a \leq 0$ 时, 函数在 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上是减函数,

则 $f(x)_{\max} = f(0) = 1 - a = 3$, 即 $a = -2$;

当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上是增函数, 在区间 $[a, 1]$ 上是减函数,

则 $f(x)_{\max} = f(a) = a^2 - a + 1 = 3$, 解得 $a = 2$ 或 -1 , 不符合;

当 $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上是增函数,

则 $f(x)_{\max} = f(1) = -1 + 2a + 1 - a = 3$, 解得 $a = 3$;

综上所述, $a = -2$ 或 $a = 3$

【解析】

本题考查二次函数的简单性质的应用, 分类讨论思想的应用, 考查计算能力.

(1) 若 $a=2$, 化简 $f(x)=-x^2+4x-1=-(x-2)^2+3$, 利用对称轴以及开口方向, 判断单调区间, 然后求解最小值.

(2) 对称轴为 $x=a$, 通过当 $a\leq 0$ 时, 当 $0<a<1$ 时, 当 $a\geq 1$ 时, 求解最大值, 推出 a 即可得到结果.