

基于数学核心素养的教学设计

——以“点到直线的距离”为例*

钱建良 谢 丽 (江苏省宜兴市和桥高级中学 214211)

高中数学学科核心素养包括数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析六大维度,同时把“能力”内涵进行了拓展,强调了“思维品质”在数学核心素养中的作用.这些数学核心素养既有独立性,又相互交融,形成了一个有机整体.

我们厘清数学学科核心素养的基本内涵,是为了探索把数学学习内化为能力和品格的有效途径与方法.今以“点到直线的距离”为例,谈谈基于数学核心素养的教学设计.

1 教学目标

(1)掌握点到直线的距离公式推导中的若干数学思想和方法,掌握公式的简单应用和变式应用,掌握两平行线的距离公式.

(2)形成严谨的思维习惯,体会分类讨论及化归的思想,领会探索新问题的学习策略,提高认知能力和创新能力.

(3)通过创设问题情境,激发创新欲望;通过引导探索,提升创新潜能;通过激活、引申,体验成功喜悦,坚定创新信念.

2 教学设计

2.1 创设问题情境——问题是思维的起点

问题 1 过一定点 P 分别作一个角的两边的垂线,所确定的角与已知角有何关系?

启发引导作图 1 和图 2.

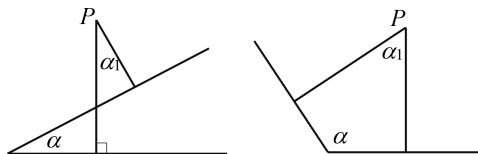


图 1

图 2

生答:……

设计意图 创设问题情境,激发学生解决问题的动机,并为解决问题 2 作铺垫.

问题 2 已知点 $P(x_0, y_0)$ 和直线 $l: Ax + By + C = 0$, 怎样求点 P 到直线 l 的距离呢?

2.2 启发引导探究——主动探究是解决问题的金钥匙

师:你见到过类似的问题吗?

生:……

师:作垂线→列方程→求垂足→算距离.书上指出,思路自然,运算量大,真是如此吗?课后你不妨试一试.

师:换个角度考虑,你能解决其中一部分或某些特殊情形吗?

例如,(1) $A=0$ 时, $d=?$ (2) $B=0$ 时, $d=?$ 更一般的问题呢? (3)设 $A \neq 0, B \neq 0$, 如何化归为一些特殊情形或解决了的某些问题呢?

设计意图 用波利亚《怎样解题》中的思想,引导学生探讨,提高学生的认知策略,调动学生认知的主观能动性.特例是最好的引路人,特例也是分类讨论的出发点,也常常是数学思维活动的切入点.

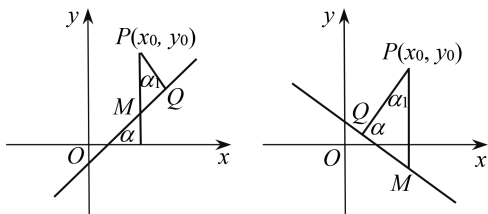


图 3 $A \neq 0, B \neq 0, d=?$

例如,作 $PM \parallel Oy$ 轴,交直线 l 于点 $M \rightarrow M(x_0, -\frac{Ax_0 + C}{B}) \rightarrow PM = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{|B|}$.

师:求出 PM , 如何求 PQ 呢?

引思促思发现,在 $Rt\triangle PMQ$ 中引进角参数 $\angle MPQ = \alpha_1$, 对照问题 1 进行类比可发现 α_1 与倾斜角 α 有何关系?

针对学生回答,结合问题 1, 点拨学生应作分类讨论: $\alpha_1 = \alpha$ 或 $\alpha_1 = 180^\circ - \alpha$, 但 $\tan^2 \alpha_1 = \tan^2 \alpha = \frac{A^2}{B^2}$,

$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_1}} = \dots = \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. 综上得点

$P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离公式为 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

说明 (1)公式的特征,分母:勾股定理的影子;分子:当 $P(x_0, y_0)$ 在直线 l 上时, $d=0$, 即 P 在直线 l 上 $\Leftrightarrow d=0$ (证明点在直线上); (2)应用,需把

直线方程化为一般式求之;(3)当 $A=0$ 或 $B=0$ 时可不套用公式,直接求出.

设计意图 (1)充分暴露思维过程,引出倾斜角作参数,利用问题1作台阶,突破难点,使学生认知的“最近发展区”矛盾得到转化;(2)渗透分类讨论思想:① $0^\circ < \alpha < 90^\circ$,② $90^\circ < \alpha < 180^\circ$,强化三角的应用意识和工具作用.

2.3 类比联想引申——跳一跳,你能有更大的收获

你能由上述推导过程领悟其数学思想进行创新,创造出比课本更优美的解法吗?

既然可以作 $PM \parallel O_y$,能否作 $PN \parallel O_x$,而

$$PM = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{|B|} \xrightarrow{\text{类比}} PN = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{|A|} \Rightarrow MN = ? \Rightarrow d \cdot MN = PM \cdot PN \Rightarrow d = ?$$

设计意图 本推导中不需要用到分类讨论思想,只需要用到类比思想,由 PM 的结构式,直接类比出 PN 的结构式,实在高明,这也是类比思想的一个重要应用.

2.4 应用激活巩固——小试牛刀,轻松过关

应用1:求点到直线的距离.

问题3 分别求 $P_0(-1, 2)$ 到下列直线的距离:(1) $2x + y - 10 = 0$; (2) $3x = 2$; (3) $y = -x$; (4) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.

设计意图 本例中涉及四种形式求点线距,可一一化解,有的用点到直线的距离公式,有的用特例,而有的只需将方程化为一般式即可.

应用2:求两条平行直线间的距离.

问题4 求平行直线 $3x - 4y + 6 = 0$ 和 $3x - 4y - 4 = 0$ 的距离.

师:点拨引导,将其化归为点线距离解决.

2.5 推广拓展延伸——动动手,你能从中体会到数学的乐趣

问题5 如何求两平行线 $l_1: Ax + By + C_1 = 0$, $l_2: Ax + By + C_2 = 0 (C_1 \neq C_2)$ 的距离公式?

师:由于两平行线的距离处处相等,所以只要在直线 l_1 上求一点 $P(x_0, -\frac{Ax_0 + C_1}{B})$,利用点到直线的距离公式求得两平行线的距离公式为 $d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

说明 本问题解决了两平行线间的距离公式,可直接应用.但要注意 x, y 的系数要对应相等.这也是一个易错点.

2.6 归纳总结提高——提升新境界

唱好“两两两”之歌,点到直线公式轻松过:两个思想——等价转换思想与分类讨论思想;两种应用——直接用,变式用;两项注意——①当心特例,当 $A=0$ 或 $B=0$ 时可直接求,②可求两平行线间的距离公式,但要注意 x, y 的系数要对应相等.

设计意图 抓住知识结构和数学思想方法,作归纳总结,点拨提高.帮助学生产生新旧知识有意义的同化作用,建构新的数学认知结构,从而进入更高一级的数学认知水平.

3 教学感悟

3.1 关注教学设计,在钻研中领会意图

这节课是解析几何中直线部分的一节经典课.教学设计中采用问题探究教学模式,关注学生学习的过程,重视数学课堂文化建设(互动探究文化、数学交流的文化、课堂对话的文化).教学设计中,围绕本节课的教学任务有三大项:点到直线的距离公式的推导,点线距公式的应用,两平行直线的距离.学生的思维活动也对应三个阶段:一是公式推导,充分挖掘教材资源,引导学生用波利亚《怎样解题》中的思想,指导学生探讨,提高学生认知策略,调动学生认知的主观能动性;二是公式应用,在四种情形下去应用公式;三是推广拓展延伸,解决了两平行线间的距离公式.这样循序渐进化解难点,既体现出化归思想的充分应用,又符合学生的认知规律.营造了课始兴趣生、课中兴趣浓、课后兴犹存的愉悦探究氛围.

3.2 关注学生发展,在活动中发展思维

本节课突出了学生的主体地位,发展学生的认知力,教学生学会思考,体会教学内容的本质,始终把培养学生的创造性思维能力和解决实际的能力放在首位.例如,提出问题2:已知点 $P(x_0, y_0)$ 和直线 $l: Ax + By + C = 0$,怎样求点 P 到直线 l 的距离呢?教师启发学生思考:换个角度考虑,你能解决其中一部分或某些特殊情形吗?例如,(1) $A=0$ 时, $d=?$ (2) $B=0$ 时, $d=?$ 更一般的问题呢? (3)设 $A \neq 0$, $B \neq 0$,如何化归为一些特殊情形或解决了的某些问题呢?特例是最好的引路人,特例也是分类讨论的出发点,也常常是数学思维活动的切入点.充分暴露思维过程,突破难点,使学生认知的“最近发展区”矛盾得到转化.问题2解决后,接着又引导学生进行类比联想引申,领悟其推导过程中的数学思想,并创造出比课本更优美的解法,也就是点到直线距离公式的第2种推导方法.本节课通过合作探究、师生互动,展示知识的发生过程,使学生逐步体会和感悟从形到数的发展过程,展现了解析几何中数形结合的本质,暴露了数学家原始的思维轨迹,激活了学生

核心素养视角下“一元二次不等式” 的教学思考与设计

邹信武 (广西南宁市第三中学 530021)

1 问题的提出

《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称《标准》)指出,数学学科核心素养是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现,是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的.在旧教材中,“一元二次不等式”安排在必修五第三章“不等式”里,而在《标准》中,该内容属于高中预备知识,在2019年人教版《普通高中教科书数学必修第一册》(以下简称《必修第一册》)中安排在“集合”“简易逻辑”“不等式性质和基本不等式”之后.随着编排位置的改变,该教学内容所承载的涵义有何不同?它是如何反映数学核心素养?教师又该如何在教学中发展学生数学核心素养?这都是我们亟待解决的问题.

2 《标准》中的“一元二次不等式”

2.1 承上启下,初高中知识、方法和情感的过渡

在《标准》中,该节内容标题是“从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式”.学生在初中经历了从一次函数角度看一元一次方程和一元一次不等式(以下简称“三个一次”)的学习过程,形成了对函数、方程与不等式的初步认识.因此,“一元二次不等式”是初中一次不等式相关知识的延续和类比迁移,对该部分内容的学习,利于激发学生对数学学科的兴趣与信心,完成在知识、方法和情

的思维,实现了教师以启为导,学生因思而悟来完成教学目标.

3.3 关注核心素养,在探究中享受数学

最近三年有关“数学核心素养”的课题备受瞩目,对数学核心素养的研究和讨论成为了教育的热点.数学教师在课堂教学中不能单纯地讲数学或让学生一味做练习,而是应引导学生在“用数学”中实现核心素养的内化提升.这里说的“用数学”,主要是指“用数学眼光观察世界,用数学思维思考世界,用数学语言表达世界”三个方面.在课程改革深入推进的今天,数学课堂教学要注意挖掘人文教育内容,重

感上的初高中过渡.另外,解一元二次不等式是高中重要的代数运算之一,它为后续知识的展开与深入提供了运算基础.

2.2 培养数学核心素养的优良载体

(1)有利于提升学生的数学抽象和直观想象两大核心素养.数学抽象是一个对象在另一个对象属性基础上的抽象过程,只有知识之间的联系才能体现抽象过程.直观想象主要包括几何直观与空间想象两个方面.直观想象是认识抽象对象的另一条途径,它是符号化语言的直观解释.《标准》把“一元二次不等式”作为高中预备知识,一方面是因为其应用的广泛性,另一方面是因其可以体现函数、方程与不等式之间的联系.在本课时中,通过用二次函数的观点看待一元二次方程和一元二次不等式(以下简称“三个二次”),使学生不断地在自然语言、符号语言与图象间进行转换,使学生认知中“函数、方程与不等式”的关系得以再次巩固和深化,进而掌握用函数理解方程和不等式这一数学基本思想方法.因此,本课的主旨是使学生理解和建立起“函数、方程与不等式”之间几何与代数的联系,并在此过程中发展学生的数学抽象与直观想象两大核心素养.

如图1,通过“三个一次”关系的回顾和对“三个二次”之间关系的探讨,达成函数、方程与不等

视数学的人文性,使数学的人文精神价值得到进一步扩展,并以此加强对数学核心素养的培养,更新学生的世界观和方法论.今天,学生获得数学知识的渠道变了,要在经历、探究学习过程中,获得基础知识和基本技能,并能解决一些实际问题;学生获得的数学知识的形态变了,要在自己动手实践“做数学”的过程中,建构数学知识的意义,获得数学活动的经验.因此在当前的新课程改革中,为了使新课程真正适应学生的发展,对于数学教师来说,在教学实践中关注学生的核心素养的培养,重视数学课堂文化的建设,应用问题探究的教学模式就显得尤为重要.