



典型例题

◆ 目标 1 基本不等式应用于一元函数的最值

例 1 (1) 已知 $x < \frac{1}{2}$, 则函数 $y = \frac{4x^2 - 2x + 1}{2x - 1}$ 的最大值是_____.

(2) 若不等式 $x^2 - 2y^2 \leq cx(y - x)$ 对任意满足 $x > y > 0$ 的实数 x, y 恒成立, 则实数 c 的最大值为_____.

【同类题组梯度选练】

1. 函数 $y = x + \frac{1}{x} (x < 0)$ 的值域是_____.
2. 函数 $y = \frac{\sqrt{x+2}}{2x+5} (x > -2)$ 的最大值为_____.
3. 已知实数 x, s, t 满足: $8x + 9t = s$, 且 $x > -s$, 则 $\frac{x^2 + (s+t)x + st + 1}{x+t}$ 的最小值为_____.

◆ 目标 2 给定条件下, 二元变量的最值问题

例 2 (1) 若三角形的三个内角的弧度数分别为 α, β, γ , 则 $\frac{4}{\alpha} + \frac{1}{\beta + \gamma}$ 的最小值为_____.

(2) 已知正实数 x, y 满足 $xy + 2x + y = 4$, 则 $x + y$ 的最小值为_____.

(3) 已知 a, b 均为正数, 且 $ab - a - 2b = 0$, 则 $\frac{a^2}{4} - \frac{2}{a} + b^2 - \frac{1}{b}$ 的最小值为_____.

【同类题组梯度选练】

1. 已知 $\ln \sqrt{x} \cdot \ln y = 1$, 其中 $x, y \in (1, +\infty)$, 则 $\ln(xy)$ 的最小值为_____.
2. 已知正数 x, y 满足 $x + 2y = 2$, 则 $\frac{x+8y}{xy}$ 的最小值为_____.

3. 若 $\log_4(3a+4b) = \log_2 \sqrt{ab}$, 则 $a+b$ 的最小值是_____.

4. 若实数 x, y 满足 $2x^2 + xy - y^2 = 1$, 则 $\frac{x-2y}{5x^2-2xy+2y^2}$ 的最大值为_____.

◆ 目标 3 多元问题

例 3 (1) 已知 $\triangle ABC$ 的三边长 a, b, c 成等差数列, 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 84$, 则实数 b 的取值范围为_____.

(2) 设正实数 x, y, z 满足 $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$, 则当 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时, $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z}$ 的最大值为_____.

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a^2 + b^2 + 2c^2 = 8$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

【同类题组梯度选练】

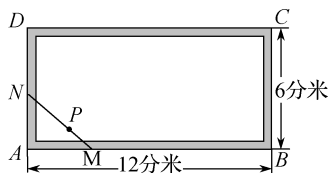
1. 设 x, y, z 为正实数, 满足 $x - 2y + 3z = 0$, 则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值是_____.
2. 已知实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 则 a 的最大值是_____.
3. 已知三次函数 $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + d$ ($a < b$) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 $\frac{a+b+c}{b-a}$ 的最小值为_____.
4. 设实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 \leq c \leq 1$, 则 $a + b + c$ 的最小值为_____.

目标 4 用基本不等式解应用题

例 4 如图,长方形 $ABCD$ 表示一张 6×12 (单位:分米)的工艺木板,其四周有边框(图中阴影部分),中间为薄板. 木板上一瑕疵(记为点 P)到外边框 AB, AD 的距离分别为 1 分米, 2 分米. 现欲经过点 P 锯掉一块三角形废料 MAN , 其中 M, N 分别在 AB, AD 上. 设 AM, AN 的长分别为 m 分米, n 分米.

(1) 为使剩下木板 $MBCDN$ 的面积最大, 试确定 m, n 的值;

(2) 求剩下木板 $MBCDN$ 的外边框长度 (MB, BC, CD, DN 的长度之和) 的最大值.



【同类题组梯度选练】

如图,某城市有一块半径为 1 (单位:百米)的圆形景观,圆心为 C , 有两条与圆形景观相切且互相垂直的道路. 最初规划在拐角处(图中阴影部分)只有一块绿化地, 后来有众多市民建议在绿化地上建一条小路, 便于市民快捷地往返两条道路. 规划部门采纳了此建议, 决定在绿化地中增建一条与圆 C 相切的小道 AB . 问: A, B 两点应选在何处可使得小道 AB 最短?

