一字之差，谬之千里

——谈恒成立、能成立、恰成立问题

■福建 童其林(特级教师)

一、知识点击

1. 不等式恒成立问题。

不等式 $f(x)>A$ 在区间 D 上恒成立，等价于函数 $f(x)$ 在区间 D 上的最小值大于 A；不等式 $f(x)<B$ 在区间 D 上恒成立，等价于函数 $f(x)$ 在区间 D 上的最大值小于 B。

2. 不等式能成立问题。

在区间 D 上，存在实数 x，使不等式 $f(x)>A$ 成立，即 $f(x)>A$ 在区间 D 上能成立，等价于函数 $f(x)$ 在区间 D 上的最大值大于 A；在区间 D 上，存在实数 x，使不等式 $f(x)<B$ 成立，即 $f(x)<B$ 在区间 D 上能成立，等价于函数 $f(x)$ 在区间 D 上的最小值小于 B。

3. 不等式恰成立问题。

不等式 $f(x)>A$ 在区间 D 上恰成立，等价于不等式 $f(x)>A$ 的解集为 D；不等式 $f(x)<B$ 在区间 D 上恰成立，等价于不等式 $f(x)<B$ 的解集为 D。

最好将不等式恒成立、能成立、恰成立问题与方程和不等式有解、无解问题进行联系和对比。

不等式有解问题：$f(x)>A$ 有解 $\Leftrightarrow f(x)_{\max}>A$，例如，$\sin x>a$ 有解 $\Leftrightarrow 1>a$；$f(x)<A$ 有解 $\Leftrightarrow f(x)_{\min}<A$，例如，$\sin x<a$ 有解 $\Leftrightarrow -1<a$。

不等式无解问题：$f(x)<A$ 无解 $\Leftrightarrow f(x)_{\min}\geqslant A$，例如，$\sin x<a$ 无解 $\Leftrightarrow -1\geqslant a$；$f(x)>A$ 无解 $\Leftrightarrow f(x)_{\max}\leqslant A$，例如，$\sin x>a$ 无解 $\Leftrightarrow 1\leqslant a$。

方程无解和有解问题：方程 $f(x)=a$ 无解 $\Leftrightarrow a$ 不属于 $f(x)$ 的值域；方程 $f(x)=a$ 有解 $\Leftrightarrow a$ 属于 $f(x)$ 的值域。

其实，不等式能成立问题与不等式有解问题是一致的。把上述几个问题集中起来研究，并给出相应的训练，同学们肯定能在对比中更好地掌握这些问题。

二、典型例题分析

例1 已知 $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}$。

(1)对任意 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，试求实数 a 的取值范围。

(2)当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 的值域是 $[0,+\infty)$，试求实数 a 的值。

解析：(1)恒成立问题。

$f(x)\geqslant 0$ 对任意 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，等价于 $\varphi(x)=x^2+2x+a\geqslant 0$ 对任意 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立。

由 $\varphi(x)=(x+1)^2+a-1$，得函数 $\varphi(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，则 $\varphi(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 $\varphi(1)=a+3$，则 $a+3\geqslant 0$，解得 $a\geqslant -3$。

(2)恰成立问题。

当 $a\geqslant 0$ 时，由 $x\geqslant 1$，得 $f(x)=x+\frac{a}{x}+2\geqslant 3$，与 $f(x)$ 的值域是 $[0,+\infty)$ 相矛盾。

当 $a<0$ 时，$f(x)=x+\frac{a}{x}+2$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 $f(1)=a+3$。由题意得 $f(1)=0$，即 $a+3=0$，解得 $a=-3$。

例2 已知 $f(x)=px-\frac{p}{x}-2\ln x$（e 为自然对数的底数）。设 $g(x)=\frac{2e}{x}$，若在 $[1,e]$ 上至少存在一点 x_0，使得 $f(x_0)>g(x_0)$ 成立，求实数 p 的取值范围。

解析：能成立问题。

若在 $[1,e]$ 上至少存在一点 x_0，使得 $f(x_0)>g(x_0)$ 成立，则函数 $F(x)=f(x)-g(x)=px-\frac{p}{x}-2\ln x-\frac{2e}{x}$ 在 $[1,e]$ 上的最大值大于 0。

$$F'(x)=\frac{p(x^2+1)+2(e-x)}{x^2}。$$

①当 $p\geqslant 0$ 时，由 $x\in[1,e]$，得 $F'(x)\geqslant 0$，则 $F(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递增，故 $F(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最大值为 $F(e)=pe-\frac{p}{e}-4$。由题意得 $F(e)>0$，即 $pe-\frac{p}{e}-4>0$，解得 $p>\frac{4e}{e^2-1}$。

②当 $p<0$ 时，由 $x\in[1,e]$，得 $F(x)=p\left(x-\frac{1}{x}\right)-2\ln x-\frac{2e}{x}<0$，则 $F(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最大值不可能大于 0。

由①和②可知 $p>\frac{4e}{e^2-1}$。

例3 (1)若关于 x 的不等式 $x^2-ax-a>0$ 的解集为 $(-\infty,+\infty)$，求实数 a 的取值范围。

(2)若关于 x 的不等式 $x^2-ax-a\leqslant -3$ 的解集不是空集，求实数 a 的取值范围。

解析：(1)恒成立问题。

设 $f(x)=x^2-ax-a$。

由关于 x 的不等式 $x^2-ax-a>0$ 的解集为

$(-\infty,+\infty)$，得 $f(x)>0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒成立。

$f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{4a+a^2}{4}$。由题意得 $f\left(\frac{a}{2}\right)>0$，即 $-\frac{4a+a^2}{4}>0$，解得 $-4<a<0$。

也可以直接由 $\Delta=(-a)^2-4(-a)<0$，得到 $-4<a<0$。

(2)能成立问题。

设 $f(x)=x^2-ax-a$。

由关于 x 的不等式 $x^2-ax-a\leqslant-3$ 的解集不是空集，得 $f(x)\leqslant-3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上能成立。

$f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{4a+a^2}{4}$。由题意得 $f\left(\frac{a}{2}\right)\leqslant-3$，即 $-\frac{4a+a^2}{4}\leqslant-3$，解得 $a\leqslant-6$ 或 $a\geqslant2$。

例4 已知函数 $f(x)=\lg(a-ax-x^2)$。

(1)若 $f(x)$ 的定义域 $A\neq\varnothing$，试求实数 a 的取值范围。

(2)若 $f(x)$ 在 $(2,3)$ 上有意义，试求实数 a 的取值范围。

(3)若 $f(x)>0$ 的解集为 $(2,3)$，试求实数 a 的值。

解析：(1)能成立问题。

$f(x)$ 的定义域非空，相当于存在实数 x，使 $a-ax-x^2>0$ 成立，则 $\varphi(x)=a-ax-x^2$ 的最大值大于0。

$\varphi(x)$ 的最大值为 $\varphi\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2+4a}{4}$。

由题意得 $\varphi\left(-\frac{a}{2}\right)>0$，即 $\frac{a^2+4a}{4}>0$，解得 $a<-4$ 或 $a>0$。

(2)恒成立问题。

$f(x)$ 在 $(2,3)$ 上有意义，等价于 $\varphi(x)=a-ax-x^2>0$ 在 $(2,3)$ 上恒成立，即 $a<\frac{x^2}{1-x}$ 在 $(2,3)$ 上恒成立。

函数 $g(x)=\frac{x^2}{1-x}=1-x+\frac{1}{1-x}-2$。由 $x\in(2,3)$，得 $-2<1-x<-1$，则函数 $g(x)$ 在 $(2,3)$ 上单调递减。又 $g(3)=-\frac{9}{2}$，则 $a\leqslant-\frac{9}{2}$。

也可以由二次函数的图像，得 $\varphi(2)\geqslant0$，$\varphi(3)\geqslant0$，解得 $a\leqslant-\frac{9}{2}$。

(3)恰成立问题。

$f(x)>0$ 的解集为 $(2,3)$，等价于不等式 $a-ax-x^2>1$ 的解集为 $(2,3)$，即方程 $x^2+ax+1-a=0$ 的两个根为2和3，则 $a=-5$。

例5 设函数 $f(x)=(1+x)^2-2\ln(1+x)$。若存在 $x_0\in[0,1]$，使不等式 $f(x_0)-m\leqslant0$ 能成立，求实数 m 的最小值。

解析：能成立问题。

函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>-1\}$。

$f'(x)=\frac{2(x^2+2x)}{1+x}$。

当 $x\in[0,1]$ 时，$f'(x)\geqslant0$，则函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，故函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $f(0)=1$，从而 $m\geqslant1$，即 m 的最小值为1。

总之，恒成立问题解法较为灵活，常见的方法有：分离变量，利用最值处理；分离出两个函数，利用函数的图像；构造函数等。能成立问题有时可以转化为恒不成立问题来处理。对于恰成立问题，直接代入即可。具体做法要视具体问题而定。

你来试一试

1. 设 $x=3$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax+b)e^{3-x}(x\in\mathbf{R})$ 的一个极值点，$a>0$，$g(x)=\left(a^2+\frac{25}{4}\right)e^x$。若存在 ξ_1、$\xi_2\in[0,4]$，使得 $|f(\xi_1)-g(\xi_2)|<1$ 成立，求 a 的取值范围。

2. 设函数 $f(x)=\frac{3x+4m}{x^2+m}$ 的图像过点 $A(2,2)$，$g(x)=\frac{6a^2}{x+a}$，$a>\frac{1}{3}$。

(1)求 $f(x)$ 的解析式。

(2)求 $f(x)$ 的极大值与极小值。

(3)若对任意 $x_0\in[0,a]$，总存在相应的 x_1、$x_2\in[0,a]$，使得 $g(x_1)\leqslant f(x_0)\leqslant g(x_2)$ 成立，试求实数 a 的取值范围。

3. 已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\frac{1}{2}ax^2+2x$，$a\neq0$，且 $h(x)=f(x)-g(x)$ 存在单调递减区间，求实数 a 的取值范围。

参考答案：**1.** a 的取值范围是 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$。

2. (1) $f(x)=\frac{3x+4}{x^2+1}(x\in\mathbf{R})$。

(2) $f(x)$ 的极小值是 $f(-3)=-\frac{1}{2}$，极大值是 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}$。

(3)实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{3}{4},\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right]$。

3. 实数 a 的取值范围是 $(-1,0)\cup(0,+\infty)$。

（责任编辑　袁伟刚）