江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三数学周三练习（2）文科

2018. 9. 12

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆 、圆锥曲线、不等式

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

1．已知集合 A＝{－2，－1，3，4}，B＝{－1，2，3}，则 A∩B＝__________.

2．命题“∃x∈(0，＋∞)，ln x＝x－1”的否定是____________ .

3．若复数 z 满足(z－1)i＝－1＋i，其中 i 是虚数单位，则复数 z 的模是____________.

4．若函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$($\omega$>0)的最小正周期为 π，则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$的值是________.

5．已知点 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，该抛物线上位于第一象限的点 A 到其准线的距离为 5，则直线 AF 的斜率为_________.

6．已知函数 f(x)为定义在 **R** 上的奇函数，当 x⩾0 时，f(x)＝2^x＋2x＋m(m 为常数)，则 f(－1)的值为__________.

7．已知 α∈$\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$，且 cos α ＝$-\frac{4}{5}$，则 tan($\frac{\pi}{4}$－α)＝_________.

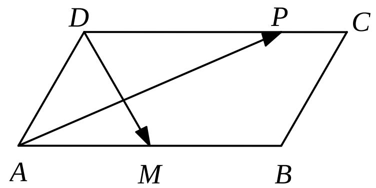
8. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知过点 M(1,1)的直线 l 与圆$(x+1)^2+(y-2)^2=5$ 相切，且与直线 $ax+y-1=0$ 垂直，则实数 a=_______.

9．已知正数 a,b 满足$\frac{1}{a}+\frac{9}{b}=\sqrt{ab}-5$，则 ab 的最小值为__________.

10．设ΔABC是等腰三角形，$\angle ABC=120^\circ$，则以 A、B 为焦点且过点 C 的双曲线的离心率为____.

11．已知函数 $f(x)=\begin{cases} a^x（x<0）, \\ （a-3）x+4a（x\geqslant 0）\end{cases}$ 满足对任意 $x_1\neq x_2$，都有$\dfrac{f（x_1）-f（x_2）}{x_1-x_2}<0$ 成立，则 a 的取值范围是__________.

12．如图，在平行四边形 *ABCD* 中，已知 $AB=2$，$AD=1$，$\angle DAB=60°$，点 *M* 为 *AB* 的中点，点 *P* 在 *CD* 上运动（包括端点），则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DM}$ 的取值范围是__________.



13．已知函数 $f(x)=\begin{cases} lnx+e^x-3, & x\geq 1 \\ x^2+ax+2, & x<1\end{cases}$ 有且仅有 2 个零点，则 *a* 的范围是_____________.

14．已知三次函数 $f(x)=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+d(a<b)$在 **R** 上单调递增，则$\dfrac{a+b+c}{b-a}$的最小值为_______.

二、解答题：本大题共 6 小题，计 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内.

15. 已知向量 $\mathbf{m}=(\cos\alpha，-1)$，$\mathbf{n}=(2，\sin\alpha)$，其中 $\alpha\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\mathbf{m}\perp\mathbf{n}$.

(1) 求 $\cos 2\alpha$ 的值；　(2) 若 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 $\beta\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$，求角 β.

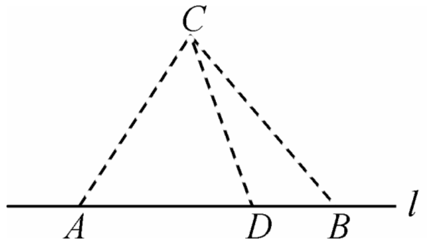
16. 设函数 $f(x)=\sin(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{6})-\cos\frac{\pi}{4}x$.

（1）求 $f(x)$ 的单调增区间；　（2）若 $x\in(0,4)$，求 $y=f(x)$ 的值域.

17. 如图，在海岸线l一侧C处有一个美丽的小岛，某旅游公司为方便游客，在l上设立了A，B两个报名点，满足A，B，C中任意两点间的距离为10 km.公司拟按以下思路运作：先将A，B两处游客分别乘车集中到AB之间的中转点D处(点D异于A，B两点)，然后乘同一艘轮游轮前往C岛．据统计，每批游客A处需发车2辆，B处需发车4辆，每辆汽车每千米耗费$2a$元，游轮每千米耗费$12a$元．（其中a是正常数）设$\angle CDA=\theta$，每批游客从各自报名点到C岛所需运输成本为S元．

（1）写出S关于θ的函数表达式，并指出θ的取值范围；

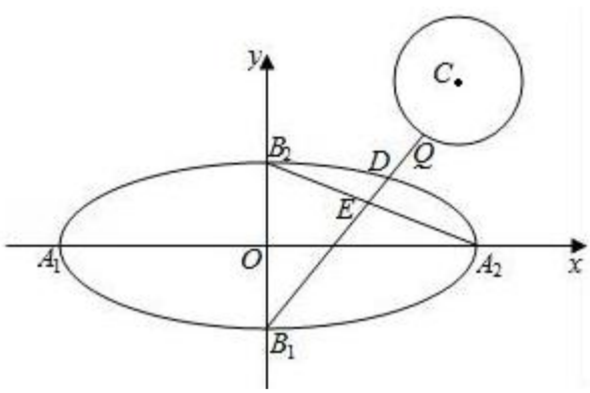
（2）问：中转点D距离A处多远时，S最小？



18. 如图，已知椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的四个顶点分别为A_1,A_2,B_1,B_2，左右焦点分别为F_1,F_2，若圆C：$(x-3)^2+(y-3)^2=r^2$（$0<r<3$）上有且只有一个点P满足$\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=\sqrt{5}$，

（1）求圆C的半径r；

（2）若点Q为圆C上的一个动点，直线QB_1交椭圆于点D，交直线A_2B_2于点E，求$\dfrac{|DB_1|}{|EB_1|}$的最大值.



19. 已知函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2ax$.

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(2,f(2))$ 处的切线的斜率为 -6，求实数 a；

（2）若 $a=1$，求 $f(x)$ 的极值；

（3）当 $0<a<2$ 时，$f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最小值为 $-\frac{16}{3}$，求 $f(x)$ 在该区间上的最大值.

20. 已知函数 $f(x)=x-\ln x$ ，$g(x)=x^2-ax$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1](t>0)$ 上的最小值 $m(t)$；

(2) 令 $h(x)=g(x)-f(x)$，$A(x_1,h(x_1))$，$B(x_2,h(x_2))(x_1\neq x_2)$ 是函数 $h(x)$ 图像上任意两点，且满足 $\frac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}>1$，求实数 a 的取值范围；

(3) 若 $\exists x\in(0,1]$，使 $f(x)\geq\frac{a-g(x)}{x}$ 成立，求实数 a 的最大值.

数学周三练习（2）文科**参考答案** 2018.9.12

一、填空题：

1. {－1，3}　　2. ∀x∈(0，＋∞)，ln x≠x－1　　3. $\sqrt{5}$

4. $\frac{1}{2}$　　5. $\frac{4}{3}$　　6. －3　　7. $\frac{1}{7}$　　8. $\frac{1}{2}$　　9. 36

10. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　11. $0<a\leqslant\frac{1}{4}$　　12. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$　　13. $a=2\sqrt{2}$或 $a<-3$　　14. 3

二、解答题：

15. 解：(1) (解法 1) 由 $m\perp n$ 得，$2\cos\alpha-\sin\alpha=0$，$\sin\alpha=2\cos\alpha$，(2 分)

代入 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，$5\cos^2\alpha=1$，且 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，(4 分)

则 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$. (6 分)

(解法 2) 由 $m\perp n$ 得，$2\cos\alpha-\sin\alpha=0$，$\tan\alpha=2$，(2 分)

故 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5}$. (6 分)

(2) 由 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$得，$\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

因 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，则 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. (9 分)

则 $\sin\beta=\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. (12 分)

因 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得 $\beta=\frac{\pi}{4}$. (14 分)

16. 解：(1) $f(x)=\sin(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{6})-\cos\frac{\pi}{4}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{4}x-\frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{4}x=\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{3})$ …4 分

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为：$[-\frac{2}{3}+8k,\frac{10}{3}+8k](k\in Z)$　　……7 分

(2)　$f(x)$ 的值域为：$(-\frac{3}{2},\sqrt{3}]$　　……14 分

17. 解：(1) 由题知在△ACD 中，$\angle CAD=\frac{\pi}{3}$，$\angle CDA=\theta$，$AC=10$，$\angle ACD=\frac{2\pi}{3}-\theta$.

由正弦定理知$\dfrac{CD}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{AD}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)}=\dfrac{10}{\sin\ \alpha}$，　　　　…………2 分

即 $CD=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sin\ \alpha}$，　$AD=\dfrac{10\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)}{\sin\ \alpha}$，　　　　……………4 分

所以 $S=4aAD+8aBD+12aCD=(12CD-4AD+80)a$

$=[\dfrac{60\sqrt{3}-40\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)}{\sin\ \alpha}]a+80a\quad=[20\sqrt{3}\dfrac{3-\cos\ \alpha}{\sin\ \alpha}]a+60a\left(\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{2\pi}{3}\right)$　　…7 分

(2) $S'=20\sqrt{3}\ \dfrac{1-3\cos\ \alpha}{\sin^2\alpha}\cdot a$，

令 $S'=0$ 得 $\cos\ \theta=\dfrac{1}{3}$　　　　……………………9 分

当 $\cos\ \theta>\dfrac{1}{3}$时，$S'<0$；　当 $\cos\ \theta<\dfrac{1}{3}$时，$S'>0$，

所以当 $\cos\ \theta=\dfrac{1}{3}$时，$S$ 取得最小值，　　　　………………12 分

此时 $\sin\ \theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$AD=\dfrac{5\sqrt{3}\cos\ \alpha+5\sin\ \alpha}{\sin\ \alpha}=5+\dfrac{5\sqrt{6}}{4}$，

所以中转点 C 距 A 处$\dfrac{20+5\sqrt{6}}{4}$ km 时，运输成本 S 最小．　………………14 分

18.（1）依题意得，$F_1(-1,0),F_2(1,0)$，设点$P(x,y)$，

由$\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=\sqrt{5}$得：$\dfrac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\sqrt{5}$，化简得$(x-\dfrac{3}{2})^2+y^2=\dfrac{5}{4}$，

∴点P的轨迹是以点$(\dfrac{3}{2},0)$为圆心，$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$为半径的圆，

又∵点P在圆C上并且有且只有一个点P，即两圆相切，

当两圆外切时，圆心距$\dfrac{3\sqrt{5}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}+r\Rightarrow r=\sqrt{5}\in(0,3)$，成立…………… 4 分

当两圆内切时，圆心距$\dfrac{3\sqrt{5}}{2}=r-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow r=2\sqrt{5}\notin(0,3)$，不成立

$\therefore r=\sqrt{5}$　　　　…………… 6 分

（2）设直线QB_1为$y=kx-1$，

由$d=\dfrac{|3k-3-1|}{\sqrt{k^2+1}}\le\sqrt{5}$ 得, $k\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{11}{2}\right]$ …………… 8 分

联立$\begin{cases} y=kx-1 \\ x^2+2y^2=2 \end{cases}$，消去$y$并整理得：$(2k^2+1)x^2-4kx=0$，

解得点D的横坐标为$x_D=\dfrac{4k}{2k^2+1}$， …………… 10 分

把直线QB_1：$y=kx-1$与直线$A_2B_2: x+\sqrt{2}y=\sqrt{2}$

联立解得点E横坐标$x_E=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}k+1}$ ……………12 分

所以$\dfrac{|DB_1|}{|EB_1|}=\dfrac{x_D}{x_E}=\dfrac{2k^2+\sqrt{2}k}{2k^2+1}=1+\dfrac{\sqrt{2}k-1}{2k^2+1}=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}k-1+\dfrac{2}{\sqrt{2}k-1}+2}\le1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}+2}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ … 16 分

19. 解：（1） 因为 $f\quad(x)=-x^2+x+2a$，
曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(2,f(2))$ 处的切线的斜率 $k=f'(2)=2a-2=-6$，$a=-2$.

（2） 当 $a=1$ 时，$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+2x$，$f'(x)=-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调减	$-\dfrac{7}{6}$	单调增	$\dfrac{10}{3}$	单调减

所以 $f(x)$ 的极大值为 $\dfrac{10}{3}$，$f(x)$ 的极小值为 $-\dfrac{7}{6}$.

（3） $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+2ax$，$f'(x)=-x^2+x+2a$.

令 $f\quad(x)=0$，得 $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1+8a}}{2}$，$x_2=\dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{2}$，

$f(x)$ 在（$-\infty,x_1$），（$x_2,+\infty$）上单调递减，在（x_1,x_2）上单调递增.
当 $0<a<2$ 时，有 $x_1<1<x_2<4$，所以 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最大值为 $f(x_2)$.

又因为 $f(4)<f(1)$，所以 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最小值为 $f(4)=8a-\dfrac{40}{3}=-\dfrac{16}{3}$，解得 $a=1$.

所以 $x_2=2$，所以 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最大值为 $f(2)=\dfrac{10}{3}$.

20．解：(1) $f'(x)=1-\frac{1}{x}, x>0$,令 $f'(x)=0$,则 $x=1$.

当 $t\geq1$ 时,$f(x)$在$[t,t+1]$上单调递增,$f(x)$的最小值为 $f(t)=t-\ln t$;　(1 分)

当 $0<t<1$ 时,$f(x)$在区间$(t,1)$上为减函数,在区间$(1,t+1)$上为增函数,$f(x)$的最小值为 $f(1)=1$.

综上,$m(t)=\begin{cases} t-\ln t, & t\geq 1, \\ 1, & 0<t<1. \end{cases}$　(3 分)

(2) $h(x)=x^2-(a+1)x+\ln x$,不妨取 $0<x_1<x_2$,则 $x_1-x_2<0$,

则由$\frac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}>1$,可得 $h(x_1)-h(x_2)<x_1-x_2$，变形得 $h(x_1)-x_1<h(x_2)-x_2$ 恒成立.　(5 分)

令 $F(x)=h(x)-x=x^2-(a+2)x+\ln x, x>0$,

则 $F(x)=x^2-(a+2)x+\ln x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，故 $F'(x)=2x-(a+2)+\frac{1}{x}\geq0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,(7 分)

所以 $2x+\frac{1}{x}\geq a+2$ 在$(0,+\infty)$上恒成立.因为 $2x+\frac{1}{x}\geq2\sqrt{2}$,当且仅当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取“=”,所以 $a\leq2\sqrt{2}-2$.(10 分)

(3) 因为 $f(x)\geq\frac{a-g(x)}{x}$,所以 $a(x+1)\leq2x^2-x\ln x$.

因为 $x\in(0,1]$,则 $x+1\in(1,2]$,所以$\exists x\in(0,1]$,使得 $a\leq\frac{2x^2-x\ln x}{x+1}$成立.

令 $M(x)=\frac{2x^2-x\ln x}{x+1}$,则 $M'(x)=\frac{2x^2+3x-\ln x-1}{(x+1)^2}$.(12 分)

令 $y=2x^2+3x-\ln x-1$,则由 $y'=\frac{(x+1)(4x-1)}{x}=0$ 可得 $x=\frac{1}{4}$或 $x=-1$(舍).

当 $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$时,$y'<0$,则函数 $y=2x^2+3x-\ln x-1$ 在$\left(0,\frac{1}{4}\right)$上单调递减;

当 $x\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$时,$y'>0$,则函数 $y=2x^2+3x-\ln x-1$ 在$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$上单调递增.

所以 $y\geq\ln4-\frac{1}{8}>0$,所以 $M'(x)>0$ 在 $x\in(0,1]$时恒成立,

所以 $M(x)$在$(0,1]$上单调递增.所以只需 $a\leq M(1)$,即 $a\leq1$.　(15 分)

所以实数 a 的最大值为 1.　(16 分)