

# 江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三

## 数学周三练习 (3) 文科

2018.9.19

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆、圆锥曲线、不等式

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

1. 已知集合  $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ ,  $B = \{x | -1 < x \leq 1\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.

2. 若命题  $p: \exists x \in \mathbf{R}, \text{使 } x^2 + ax + 1 < 0$ , 则  $\neg p:$  \_\_\_\_\_.

3. 函数  $y = \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

4. 曲线  $y = x - \cos x$  在点  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  处的切线的斜率为\_\_\_\_\_.

5. 已知平行直线  $l_1: x - 2y - 2 = 0, l_2: 2x - 4y + 1 = 0$ , 则  $l_1$  与  $l_2$  之间的距离为\_\_\_\_\_.

6. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的周期为 2 的奇函数, 当  $0 < x < 1$  时,  $f(x) = 8^x$ , 则  $f(-\frac{19}{3}) =$ \_\_\_\_\_.

7. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $a^2 - b^2 = 2bc$ ,  $\sin C = 3\sin B$ , 则  $A =$ \_\_\_\_\_.

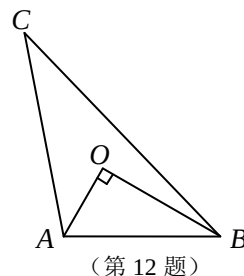
8. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 0 \\ x^2+x, & x \leq 0 \end{cases}$ , 若函数  $g(x) = f(x) - m$  有三个零点, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

9. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} a^x & (x < 0) \\ (a-3)x + 4a & (x \geq 0) \end{cases}$  满足对任意  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$  成立, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

10. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$ , 将函数  $y = f(x)$  的图象向右平移  $\frac{2}{3}\pi$  个单位长度后, 所得图象与原函数图象重合, 则  $\omega$  的最小值等于\_\_\_\_\_.

11. 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $A, B$  为直线  $3x + y - 10 = 0$  上的两动点, 以  $AB$  为直径的圆  $M$  恒过坐标原点  $O$ , 当圆  $M$  的半径最小时, 其标准方程为\_\_\_\_\_.

12. 如图, 点  $O$  为  $\triangle ABC$  的重心, 且  $OA \perp OB$ ,  $AB = 4$ , 则  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$  的值为\_\_\_\_\_.



13. 已知  $y = f(x) (x \in \mathbf{R})$  的导函数为  $f'(x)$ . 若  $f(x) - f(-x) = 2x^3$ , 且当  $x \geq 0$  时,  $f'(x) > 3x^2$ , 则不等式  $f(x) - f(x-1) > 3x^2 - 3x + 1$  的解集是\_\_\_\_\_.

14. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  和圆  $O: x^2 + y^2 = b^2$ , 若  $C$  上存在点  $P$ , 使得过点  $P$  引圆  $O$  的两条切线, 切点分别为  $A, B$ , 满足  $\angle APB = 120^\circ$ , 则椭圆  $C$  的离心率的取值范围是\_\_\_\_\_.

**二、解答题: 本大题共 6 小题, 计 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤, 请把答案写在答题纸的指定区域内.**

15. (本小题满分 14 分) 已知向量  $\vec{a} = (\sin(\frac{\omega}{2}x + \varphi), 1)$ ,  $\vec{b} = (1, \cos(\frac{\omega}{2}x + \varphi))$  ( $\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ ), 记函数  $f(x) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ . 若函数  $y = f(x)$  的周期为 4, 且经过点  $M(1, \frac{1}{2})$ .

(1) 求  $\omega$  的值; (2) 当  $-1 \leq x \leq 1$  时, 求函数  $f(x)$  的最值.

16. 已知函数  $f(x) = 3^x + \lambda \cdot 3^{-x} (\lambda \in \mathbf{R})$

(1) 若  $f(x)$  为奇函数, 求  $\lambda$  的值和此时不等式  $f(x) > 1$  的解集;

(2) 若不等式  $f(x) \leq 6$  对  $x \in [0, 2]$  恒成立, 求实数  $\lambda$  的取值范围.

17. (本小题满分 14 分)

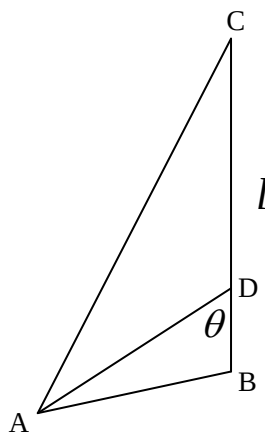
已知圆  $M: x^2 + y^2 - 2x + a = 0$ 。

- (1) 若  $a = -8$ ，过点  $P(4, 5)$  作圆  $M$  的切线，求该切线方程；  
(2) 若  $AB$  为圆  $M$  的任意一条直径，且  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -6$  (其中  $O$  为坐标原点)，求圆  $M$  的半径。

18. (本小题满分 16 分)

如图，某市在海岛  $A$  上建了一水产养殖中心。在海岸线  $l$  上有相距 70 公里的  $B$ 、 $C$  两个小镇，并且  $AB=30$  公里， $AC=80$  公里，已知  $B$  镇在养殖中心工作的员工有 3 百人， $C$  镇在养殖中心工作的员工有 5 百人。现欲在  $BC$  之间建一个码头  $D$ ，运送来自两镇的员工到养殖中心工作，又知水路运输与陆路运输每百人每公里运输成本之比为 1 : 2.

- (1) 求  $\sin \angle ABC$  的大小；  
(2) 设  $\angle ADB = \theta$ ，试确定  $\theta$  的大小，使得运输总成本最少。



19. (本小题满分 16 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点是  $(1, 0)$ , 两个焦点与短轴的一个端点构成等边三角形.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 过点  $P(4, 0)$  且不与坐标轴垂直的直线  $l$  交椭圆  $C$  于  $A, B$  两点, 设点  $A$  关于  $x$  轴的对称点为  $A_1$ .

① 求证: 直线  $A_1B$  过  $x$  轴上一定点, 并求出此定点坐标;

② 求  $\triangle OA_1B$  面积的取值范围.

20. (本小题满分 16 分) 设常数  $a \geq 0$ , 函数  $f(x) = x - \ln^2 x + 2a \ln x - 1 (x \in (0, +\infty))$ .

(1) 令  $g(x) = xf'(x) (x > 0)$  时, 求的最小值, 并比较  $g(x)$  的最小值与零的大小;

(2) 求证:  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数;

(3) 求证: 当  $x > 1$  时, 恒有  $x > \ln^2 x - 2a \ln x + 1$ .

# 江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三

## 数学周三练习 (3) 文科参考答案

2018.9.19

1.  $\{x|0 \leq x \leq 1\}$     2.  $\forall x \in \mathbf{R}, \text{使 } x^2 + ax + 1 \geq 0$     3.  $(-2, 1]$     4. 2    5.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$     6. -2

7.  $\frac{\pi}{3}$     8.  $(-\frac{1}{4}, 0]$     9.  $0 < a \leq \frac{1}{4}$     10. 3    11.  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$     12. 32

13.  $(\frac{1}{2}, +\infty)$     14.  $[\frac{1}{2}, 1)$

15. 解: (1)  $f(x) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = \sin^2(\frac{\omega}{2}x + \varphi) - \cos^2(\frac{\omega}{2}x + \varphi) = -\cos(\omega x + 2\varphi) \dots 4$  分

由题意得: 周期  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 4$ , 故  $\omega = \frac{\pi}{2}$  ..... 6 分

(2)  $\because$  图象过点  $M(1, \frac{1}{2})$ ,  $\therefore -\cos(\frac{\pi}{2} + 2\varphi) = \frac{1}{2}$

即  $\sin 2\varphi = \frac{1}{2}$ , 而  $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ , 故  $2\varphi = \frac{\pi}{6}$ , 则  $f(x) = -\cos(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{6})$ . ..... 10 分

当  $-1 \leq x \leq 1$  时,  $-\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3} \therefore -\frac{1}{2} \leq \cos(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{6}) \leq 1$

$\therefore$  当  $x = -\frac{1}{3}$  时,  $f(x)_{\min} = -1$ , 当  $x = 1$  时,  $f(x)_{\max} = \frac{1}{2}$ . ..... 14 分

16. 解: (1) 函数  $f(x) = 3^x + \lambda \cdot 3^{-x}$  的定义域为  $\mathbf{R}$ .

$\because f(x)$  为奇函数,  $\therefore f(-x) + f(x) = 0$  对  $\forall x \in \mathbf{R}$  恒成立,

即  $3^{-x} + \lambda \cdot 3^x + 3^x + \lambda \cdot 3^{-x} = (\lambda + 1)(3^x + 3^{-x}) = 0$  对  $\forall x \in \mathbf{R}$  恒成立,

$\therefore \lambda = -1$ . ..... 3 分

此时  $f(x) = 3^x - 3^{-x} > 1$  即  $(3^x)^2 - 3^x - 1 > 0$ ,

解得  $3^x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  或  $3^x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  (舍去), ..... 6 分

$\therefore$  解集为  $\{x | x > \log_3 \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$ . ..... 7 分

(2) 由  $f(x) \leq 6$  得  $3^x + \lambda \cdot 3^{-x} \leq 6$ , 即  $3^x + \frac{\lambda}{3^x} \leq 6$ ,

令  $t = 3^x \in [1, 9]$ , 原问题等价于  $t + \frac{\lambda}{t} \leq 6$  对  $t \in [1, 9]$  恒成立,

亦即  $\lambda \leq -t^2 + 6t$  对  $t \in [1, 9]$  恒成立, ..... 10 分

令  $g(t) = -t^2 + 6t, t \in [1, 9]$ ,

$\because g(t)$  在  $[1, 3]$  上单调递增, 在  $[3, 9]$  上单调递减,

$\therefore$  当  $t = 9$  时,  $g(t)$  有最小值  $g(9) = -27$ ,  $\therefore \lambda \leq -27$ . ..... 14 分

17. 解: (1) 若  $a = -8$ , 圆  $M: (x-1)^2 + y^2 = 9$ , 圆心  $M(1, 0)$ , 半径为 3. .... 2 分

若切线斜率不存在, 圆心  $M$  到直线  $x = 4$  的距离为 3,

所以直线  $x = 4$  为圆  $M$  的一条切线; ..... 4 分

若切线斜率存在，设切线方程为：  $y-5=k(x-4)$ ，化简为：  $kx-y-4k+5=0$ ，则圆心到直线的距离  $\frac{|k-4k+5|}{\sqrt{k^2+1}}=3$ ，解得：  $k=\frac{8}{15}$ 。

所以切线方程为  $x=4$  或  $8x-15y+43=0$ ； .....7 分

(2) 圆  $M$  的方程可化为  $(x-1)^2+y^2=1-a$ ，圆心  $M(1,0)$ ，则  $OM=1$

设圆的半径  $r=\sqrt{1-a}(a<1)$  .....9 分

因为  $AB$  为圆  $M$  的任意一条直径，所以  $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$ ，且  $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|$ ，则

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OM})^2 - (\overrightarrow{MB})^2 = 1 - r^2 \dots 12 \text{ 分}$$

又因为  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -6$ ，解得：  $r=\sqrt{7}$ ，所以圆的半径为  $\sqrt{7}$ 。 .....14 分

18. 解：(1) 在  $\triangle ABC$  中，  $\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{900 + 4900 - 6400}{2 \times 30 \times 70} = -\frac{1}{7}$  ...3 分

$$\text{所以 } \sin \angle ABC = \frac{4\sqrt{3}}{7} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 在 } \triangle ABD \text{ 中，由 } \frac{AD}{\sin \angle ABD} = \frac{AB}{\sin \theta} = \frac{BD}{\sin \angle BAD} \text{ 得： } \frac{30}{\sin \theta} = \frac{AD}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} = \frac{BD}{-\frac{1}{7}\sin \theta + \frac{4\sqrt{3}}{7}\cos \theta}$$

$$\text{所以 } AD = \frac{\frac{120\sqrt{3}}{7}}{\sin \theta}, \quad BD = \frac{\frac{120\sqrt{3}}{7}\cos \theta - \frac{30}{7}\sin \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{120\sqrt{3}}{7}\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{30}{7} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

设水路运输的每百人每公里的费用为  $k$  元，陆路运输的每百人每公里的费用为  $2k$  元，则运输总费用  $y = (5CD + 3BD) \times 2k + 8 \times k \times AD = 2k[5(70 - BD) + 3BD + 4AD]$

$$= 20k[35 - 2(\frac{\frac{120\sqrt{3}}{7}\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{3}{7}) + 4 \times \frac{\frac{120\sqrt{3}}{7}\cos \theta}{\sin \theta}] = 20k[35 + \frac{6}{7} + \frac{2\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{3 - 2\cos \theta}{\sin \theta}] \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{令 } H(\theta) = \frac{2 - \cos \theta}{\sin \theta}, \text{ 则 } H'(\theta) = \frac{1 - 2\cos \theta}{\sin^2 \theta}, \text{ 设 } H'(\theta) = 0, \text{ 解得： } \cos \theta = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$$

当  $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$  时，  $H'(\theta) < 0$ ,  $H(\theta)$  单调减；当  $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$  时，  $H'(\theta) > 0$ ,  $H(\theta)$  单调增

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$  时，  $H(\theta)$  取最小值，同时  $y$  也取得最小值。 .....14 分

$$\text{此时 } BD = \frac{\frac{120\sqrt{3}}{7}\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{30}{7} = \frac{90}{7}, \text{ 满足 } 0 < \frac{90}{7} < 70, \text{ 所以点 } D \text{ 落在 } BC \text{ 之间}$$

所以  $\theta = \frac{\pi}{3}$  时，运输总成本最小。

答：  $\theta = \frac{\pi}{3}$  时，运输总成本最小。 .....16 分

19. 解：(1) 易得  $a=2c$ ， $c=1$ ，则  $b=\sqrt{3}$ ，

所以椭圆标准方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

(2)①证明：不妨设直线方程为  $l: x = my + 4$ ,

$$\text{代入 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$$

$$\text{得 } (3m^2 + 4)y^2 + 24my + 36 = 0.$$

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

$$\text{则有 } y_1 + y_2 = \frac{-24m}{3m^2 + 4}, \quad (*)$$

$$y_1 y_2 = \frac{36}{3m^2 + 4}, \quad (**)$$

由  $A$  关于  $x$  轴的对称点为  $A_1$ , 得  $A_1(x_1, -y_1)$ ,

根据题设条件设定点为  $Q(t, 0)$ , 得  $k_{QA} = k_{QA_1}$ ,

$$\text{即 } \frac{y_2}{x_2 - t} = \frac{y_1}{t - x_1}, \text{ 整理得 } t = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_1 + y_2} = \frac{(4 + my_1)y_2 + (4 + my_2)y_1}{y_1 + y_2} = 4 + \frac{2my_1 y_2}{y_1 + y_2},$$

将  $(*)(**)$  代入得  $t = 1$ , 则定点为  $Q(1, 0)$ .

②由①中判别式  $\Delta > 0$ , 解得  $m > 2$  或  $m < -2$ ,

而直线  $A_1 B$  过定点  $Q(1, 0)$ ,

$$\text{所以 } S_{\triangle OA_1 B} = \frac{1}{2} |OQ| |y_{A_1} - y_B| = \frac{1}{2} |y_1 + y_2|$$

$$= \frac{12|m|}{3m^2 + 4} = \frac{4}{|m| + \frac{3}{|m|}}.$$

$$\text{记 } t = |m|, f(t) = \frac{4}{t + \frac{3}{t}}, \text{ 易得 } f(t) \text{ 在 } (2, +\infty) \text{ 上为单调递减函数, 得 } S_{\triangle OA_1 B} \in \left(0, \frac{3}{2}\right).$$

20. (本小题满分 16 分)

解：(1) 因为  $f(x) = x - \ln^2 x + 2a \ln x - 1 (x \in (0, +\infty))$ ,

$$\text{所以 } f'(x) = 1 - \left[\frac{1}{x} \times \ln x + (\ln x) \times \frac{1}{x}\right] + \frac{2a}{x} = 1 - \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2a}{x}. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } g(x) = x f'(x) = x - 2 \ln x + 2a, (x > 0), \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x - 2}{x}, \text{ 令 } g'(x) = 0, \text{ 得 } x = 2. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

列表如下：

|         |          |            |                |
|---------|----------|------------|----------------|
| $x$     | $(0, 2)$ | 2          | $(2, +\infty)$ |
| $g'(x)$ | —        | 0          | +              |
| $g(x)$  | 减        | 极小值 $g(2)$ | 增              |

所以  $g(x)$  在  $x=2$  处取得极小值  $g(2)=2-2\ln 2+2a$  ,

即  $g(x)$  的最小值为  $g(2)=2-2\ln 2+2a=2(1-\ln 2)+2a$  . .....6 分

因为  $\ln 2 < 1$  , 所以  $1-\ln 2 > 0$  , 又  $a \geq 0$  , 所以  $g(2) > 0$  . .....8 分

(2) 由 (1) 知,  $g(x)$  的最小值为正数,

所以对一切  $x \in (0, +\infty)$  , 恒有  $g(x) = xf'(x) > 0$  . .....10 分

从而当  $x > 0$  时, 恒有,  $f'(x) > 0$  ,

故  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数. ....12 分

(3) 由 (2) 知  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数,

所以当  $x > 1$  时,  $f(x) > f(1)$  . ....14 分

又  $f(1) = 1 - \ln^2 1 + 2a \ln 1 - 1 = 0$  ,

所以  $f(x) > 0$  , 即  $x - \ln^2 x + 2a \ln x - 1 > 0$  , .....15 分

所以  $x > \ln^2 x - 2a \ln x + 1$  ,

故当  $x > 1$  时, 恒有  $x > \ln^2 x - 2a \ln x + 1$  . .....16 分