

扬州市 2020 届高三考前调研测试

参考答案

一、填空题

1. ± 1 2. 5 3. 15 4. 15 5. $y = \pm\sqrt{3}x$
 6. $\frac{3}{5}$ 7. 1 8. $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ 9. $\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}$ 10. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
 11. 2 12. $\frac{1}{3}$ 13. $3+\sqrt{5}$ 14. $\left(3, \frac{7}{2}\right)$

二、解答题

15. 解: (1) 由已知, $f(x) = \cos x \left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) - \sqrt{3}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$= \frac{1}{2}\sin x \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \cos 2x) + \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right). \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

最小正周期为 $T = \pi$, 对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, 0\right) k \in \mathbb{Z}$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

(2) $g(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增 $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$g(x)_{\max} = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

$g(x)_{\min} = g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4} \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$

16. 证明: (1) 因为四边形 $EFGH$ 为平行四边形, 所以 $EF \parallel HG$,
 又 $EF \not\subset$ 平面 BCD , $HG \subset$ 平面 BCD , 所以 $EF \parallel$ 平面 BCD , $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$
 又 $EF \subset$ 平面 ABC , 平面 $ABC \cap$ 平面 $BCD = BC$, 所以 $EF \parallel BC$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

(2) 因为 $AD \perp$ 平面 BCD , $BC \subset$ 平面 BCD , 所以 $AD \perp BC$,
 由(1)知 $EF \parallel BC$, 所以 $EF \perp AD$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$
 因为 $BC \perp CD$, 所以 $EF \perp CD$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$
 又 $AD \cap CD = D$, $AD, CD \subset$ 平面 ACD ,
 所以 $EF \perp$ 平面 ACD . $\dots\dots\dots 14 \text{ 分}$

17. 解: (1) 如图, $S_1 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \times 1 = \frac{\pi}{4} - \theta \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

连接 OD , 则 $\triangle ODE \cong \triangle ODA$, $DA = \tan \theta$, $S_2 = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \tan \theta = \tan \theta$, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$S_3 = 1 - \tan \theta - \frac{\pi}{4} + \theta \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) $W = 5aS_1 + 4aS_2 + aS_3 = a(3\tan \theta - 4\theta + \pi + 1)$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

由 $2\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 知 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 所以函数的定义域为 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 9 分

(3) $W' = a\left(\frac{3}{\cos^2 \theta} - 4\right)$, 11 分

由 $W' = 0$, 得 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (舍去)

又 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$

当 $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ 时, $W' < 0$, 函数在 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减,

当 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $W' > 0$, 函数在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

所以当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, W 取最小值.

答: $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, 总造价 W 取最小值 14 分

18. 解: (1) 设椭圆 E 的焦距为 $2c$,

则直线 l 的方程为 $y = 2(x - c)$, 即 $2x - y - 2c = 0$.

因为 O 到直线 l 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $d = \frac{|2 \times 0 - 0 - 2c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2c}{\sqrt{5}}$,

所以 $\frac{2c}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $c = 1$ 3 分

因为椭圆 E 的右准线的为直线 $x = 4$, 则 $\frac{a^2}{c} = 4$, 所以 $a^2 = 4$, $b^2 = a^2 - c^2 = 3$,

故椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2) 由(1)知 $l: y = 2(x - 1)$, 设 $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$.

由 $\begin{cases} y = 2(x - 1), \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}$ 得 $19x^2 - 32x + 4 = 0$, 则 $\begin{cases} \Delta = 32^2 - 4 \times 19 \times 4 > 0, \\ x_1 + x_2 = \frac{32}{19}, \\ x_1 x_2 = \frac{4}{19}. \end{cases}$ 6 分

由 $A(-2, 0)$, $B(x_1, y_1)$ 可知 $AB: y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$,

由 $\begin{cases} y = kx, \\ y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2) \end{cases}$ 得 $x_M = \frac{2y_1}{k(x_1 + 2) - y_1}$, 9 分

同理 $x_N = \frac{2y_2}{k(x_2 + 2) - y_2}$,

因为 $OM = ON$, 所以 $\sqrt{1 + k^2} |x_M| = \sqrt{1 + k^2} |x_N|$,

由图可知 $x_M + x_N = 0$, 12 分

所以 $2y_1[k(x_2+2)-y_2]+2y_2[k(x_1+2)-y_1]=0$,

即 $(x_1-1)[k(x_2+2)-2(x_2-1)]+(x_2-1)[k(x_1+2)-2(x_1-1)]=0$,

所以 $k = \frac{4(x_1-1)(x_2-1)}{(x_1-1)(x_2+2)+(x_2-1)(x_1+2)} = \frac{4[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]}{2x_1x_2+(x_1+x_2)-4}$ 14 分

$$= \frac{4[\frac{4}{19}-\frac{32}{19}+1]}{2 \times \frac{4}{19} + \frac{32}{19} - 4} = \frac{4(4-32+19)}{8+32-4 \times 19} = 1.$$
16 分

19. 解: (1) ① 因为 $f(x)=e^x-ax^2$, 所以 $f'(x)=e^x-2ax$.

因为曲线 $f(x)$ 与直线 $l: y=(e-2)x+b$ 在 $x=1$ 处相切,

所以 $f'(1)=e-2a=e-2$, 所以 $a=1$.

所以 $f(x)=e^x-x^2$, 所以 $f(1)=e-1$.

又切点 $(1, e-1)$ 在直线 l 上, 所以 $e-1=e-2+b$,

所以 $b=1$, 所以 $a+b=2$;4 分

② 由①知 $a=1, b=1$, 可设 $h(x)=e^x-x^2-(e-2)x-1(x \geq 0)$,

则 $g(x)=h'(x)=e^x-2x-(e-2), g'(x)=e^x-2$,

当 $x < \ln 2$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > \ln 2$ 时, $g'(x) > 0$,

所以 $h'(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增,

由 $h'(0)=3-e > 0, h'(1)=0, 0 < \ln 2 < 1$, 所以 $h'(\ln 2) < 0$,

所以存在 $x_0 \in (0, \ln 2)$, 使得 $h'(x_0)=0$,8 分

所以当 $x \in (0, x_0) \cup (1, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x \in (x_0, 1)$ 时, $h'(x) < 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $h(0)=h(1)=0$, 所以 $h(x) \geq 0$,

即 $f(x) \geq (e-2)x+1$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号,

所以当 $x \geq 0$ 时, $e^x-x^2 \geq (e-2)x+1$,

故当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq (e-2)x+b$ 10 分

(3) 先证 $e^x \geq x+1$. 构造函数 $p(x)=e^x-x-1$, 则 $p'(x)=e^x-1$.

故当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $p'(x) > 0$, $p(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $p'(x) < 0$, $p(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上递减,

所以 $p(x) \geq p(0)=0$, 即 $e^x \geq x+1$ 12 分

又当 $a=0$, 且 $x \in (0, +\infty)$ 时, $x^2 f(x) \leq mx+2\ln x+1$ 等价于 $m \geq \frac{x^2 e^x - 2\ln x - 1}{x}$

故原题等价于 $x \in (0, +\infty)$ 时, $m \geq \frac{x^2 e^x - 2\ln x - 1}{x}$ 有解.

因为 $\frac{x^2 e^x - 2\ln x - 1}{x} = \frac{e^{x+\ln x^2} - 2\ln x - 1}{x} \geq \frac{x + \ln x^2 + 1 - 2\ln x - 1}{x} = 1$ (当 $x + \ln x^2 = 0$ 时取等号),

所以 $m \geq 1$16 分

20. (1) 解: 由 $\frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+2}}$, 令 $n=1$, 得 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1}{a_3}$,

因为数列 $\{a_n\}$ 的各项均为非零实数, 所以 $S_2 = a_1 + a_2 = a_3$,

所以 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 2a_3 = 3$,

所以 $a_3 = \frac{3}{2}$3 分

(2) 证明: 由 $\frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+2}}$ 得:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1}{a_3}, \frac{S_2}{S_3} = \frac{a_2}{a_4}, \frac{S_3}{S_4} = \frac{a_3}{a_5}, \dots, \frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}}, \text{ 相乘得: } \frac{S_1}{S_n} = \frac{a_1 a_2}{a_n a_{n+1}},$$

因为数列 $\{a_n\}$ 的各项均为非零实数, 所以 $a_2 S_n = a_n a_{n+1}$,

当 $n \geq 2$ 时: $a_2 S_{n-1} = a_{n-1} a_n$, 所以 $a_2 S_n - a_2 S_{n-1} = a_n a_{n+1} - a_{n-1} a_n$,

即 $a_2 (S_n - S_{n-1}) = a_n (a_{n+1} - a_{n-1})$, 即 $a_2 a_n = a_n (a_{n+1} - a_{n-1})$, 因为 $a_n \neq 0$, 所以 $a_{n+1} - a_{n-1} = a_2$,

所以数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是等差数列, 首项为 a_1 , 公差为 a_2 ,

所以 $a_{2021} = a_1 + 1010a_2 = 2021a_1$, 所以 $a_2 = 2a_1$,

所以 $a_{2n-1} = a_1 + (n-1)a_2 = (2n-1)a_1$, $a_{2n} = a_2 + (n-1)a_2 = 2na_1$, 所以 $a_n = na_1$,

所以 $a_{n+1} - a_n = a_1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.9 分

(3) 解: 当 $a_1=1, a_2=2$ 时, 由(2)知 $a_n=n$, 所以 $|2^a - 2^m| \leq \lambda |a_n^2 - a_m^2|$, 即 $|2^n - 2^m| \leq \lambda |n^2 - m^2|$,

不妨设 $m > n$, 则 $2^m > 2^n$, $m^2 > n^2$, 所以 $2^m - 2^n \leq \lambda m^2 - \lambda n^2$,

即 $2^m - \lambda m^2 \leq 2^n - \lambda n^2$ 对任意正整数 m, n ($m > n$) 恒成立,

则 $2^{n+1} - \lambda(n+1)^2 \leq 2^n - \lambda n^2$, 即 $2^n - 2\lambda n - \lambda \leq 0$ 对任意正整数 n 恒成立,

设 $C_n = 2^n - n^2$, 则 $C_{n+1} - C_n = 2^{n+1} - (n+1)^2 - 2^n + n^2 = 2^n - 2n - 1$,

设 $D_n = 2^n - 2n - 1$, 则 $D_{n+1} - D_n = 2^{n+1} - 2(n+1) - 1 - 2^n + 2n + 1 = 2^n - 2$,

当 $n \geq 5$ 时, $D_{n+1} - D_n > 0$, 所以 $D_n > D_5 > 0$, 所以 $C_n > C_5 > 0$, 所以 $2^n > n^2$,

所以 $2^n - 2\lambda n - \lambda > n^2 - 2\lambda n - \lambda$, 当 $n \geq 5$ 且 $n \geq \lambda + \sqrt{\lambda^2 + \lambda}$ 时, $2^n - 2\lambda n - \lambda > 0$,

所以不存在满足条件的实数 λ16 分

三、加试题

21. 解: 设矩阵 A 的逆矩阵为 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

$$\text{则 } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 即 } \begin{bmatrix} -a & -b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

故 $a = -1, b = 0, c = 0, d = \frac{1}{2}$.

所以矩阵 A 的逆矩阵为 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$5 分

$$\text{矩阵 } A^{-1} \text{ 的特征多项式为 } f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda-\frac{1}{2} \end{vmatrix} = (\lambda+1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)$$

令 $f(\lambda)=0$, 解得 A^{-1} 的特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=\frac{1}{2}$10 分

22. 解: 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y-m)^2=4$, 表示圆心为 $(0, m)$, 半径为 2 的圆

由 $\rho \cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$, 得 $\frac{1}{2}\rho \cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \sin\theta=1$, $x-\sqrt{3}y-2=0$2 分

设圆心到直线 l 的距离为 d , 则 $d = \frac{|0-\sqrt{3}m-2|}{\sqrt{1+\sqrt{3}^2}} = \frac{|\sqrt{3}m+2|}{2}$,4 分

$$\text{所以 } PQ = 2\sqrt{4 - \frac{(\sqrt{3}m+2)^2}{4}},$$

$$\text{令 } 2\sqrt{4 - \frac{(\sqrt{3}m+2)^2}{4}} = 2\sqrt{3}, \text{ 得 } m=0 \text{ 或 } m=-\frac{4\sqrt{3}}{3}. \text{10 分}$$

23. 解: 连接 CE , 因为 $\triangle BCD$ 为正三角形, 所以 $AE \perp DB$

又因为 $AE \perp$ 平面 BCD , $CE \subset$ 平面 BCD , 所以 $AE \perp CE$

以 $\{\vec{EB}, \vec{EC}, \vec{EA}\}$ 为正交基底建立如图空间直角坐标系,

则 $A(0, 0, \sqrt{3}), B(1, 0, 0), C(0, \sqrt{3}, 0), D(-1, 0, 0)$,

因为 F 为线段 AB 上一动点, 且 $\frac{BF}{BA} = \lambda$,

则 $\vec{BF} = \lambda \vec{BA} = \lambda(-1, 0, \sqrt{3}) = (-\lambda, 0, \sqrt{3}\lambda)$, 所以 $F(1-\lambda, 0, \sqrt{3}\lambda)$.

(1) 当 $\lambda = \frac{1}{4}$ 时, $F(\frac{3}{4}, 0, \frac{\sqrt{3}}{4})$, $\vec{DF} = (\frac{7}{4}, 0, \frac{\sqrt{3}}{4})$, $\vec{CB} = (1, -\sqrt{3}, 0)$,

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{DF}, \vec{CB} \rangle = \frac{\frac{7}{4}}{\sqrt{(\frac{7}{4})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{4})^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{7\sqrt{13}}{52}; \text{4 分}$$

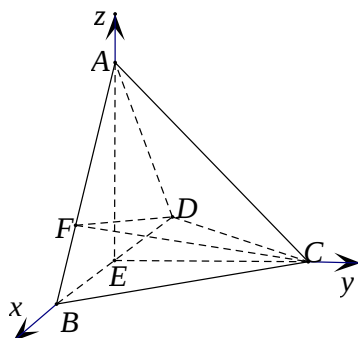
(2) $\vec{DF} = (2-\lambda, 0, \sqrt{3}\lambda)$, $\vec{DC} = (1, \sqrt{3}, 0)$

设平面 CDF 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$

$$\text{由 } \vec{n}_1 \perp \vec{DF}, \vec{n}_1 \perp \vec{DC} \text{ 得 } \begin{cases} (x, y, z) \cdot (2-\lambda, 0, \sqrt{3}\lambda) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (1, \sqrt{3}, 0) = 0 \end{cases}, \text{ 化简得}$$

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + \sqrt{3}\lambda z = 0 \\ x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases},$$

$$\text{取 } \vec{n}_1 = \left(\sqrt{3}, -1, 1 - \frac{2}{\lambda} \right)$$



又平面 BCD 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$

$$\text{设平面 } BCD \text{ 与平面 } ACD \text{ 所成角为 } \theta, \text{ 则 } \cos \theta = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \left| \frac{1 - \frac{2}{\lambda}}{\sqrt{3 + 1 + \left(1 - \frac{2}{\lambda}\right)^2} \times 1} \right| = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

解得 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 $\lambda = -1$ (舍去), 所以 $\lambda = \frac{1}{2}$10 分

24. 解: (1) 设“三只黑猫挨在一起出笼”为事件 A , 则 $P(A) = \frac{3! \times 7! \times 8}{10!} = \frac{1}{15}$.

答: 三只黑猫挨在一起出笼的概率为 $\frac{1}{15}$3 分

(2) X 的取值为: 1、2、3、4.

其中 $X = 1$ 时, 7 只白猫相邻, 则 $P(X = 1) = \frac{4! \times 7!}{10!} = \frac{1}{30}$;

$X = 2$ 时, $P(X = 2) = \frac{(6 \times 2 + 6 \times 2 + 6 \times 2) \times 7! \times 3!}{10!} = \frac{3}{10}$;

$P(X = 3) = \frac{7! (2C_3^1 A_6^2 + C_3^1 A_6^2 A_2^2)}{10!} = \frac{1}{2}$;

$P(X = 4) = \frac{7! A_6^3}{10!} = \frac{1}{6}$;

所以 $E(X) = 1 \times \frac{1}{30} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{14}{5}$10 分