轻组成　重生成　让一题多解落地生根

张　慧　（江苏省南京市第十三中学　210009）

1　问题的提出

一题多解对于培养学生思维的发散性和灵活度大有裨益，所以一题多解在解题教学中深受教师重视．然而，从一题多解的教学效果看，有时却达不到预期的效果．不少教师往往是展示方法各自讲解，将多种解法简单地堆砌后静态组成一堂课，这样，在学生看来各种方法之间就是孤立的，很难实现方法的迁移．教师应该更加注重呈现各种方法的动态生成过程，通过一道题的多种解法让学生学会对一类问题从多个思维角度思考，体会各种解法之间的区别和联系，真正做到让一题多解落地生根．下面笔者结合一节直线与圆锥曲线的习题课来阐述如何提升一题多解的有效性教学．

2　课堂实录

例　如图1，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的右顶点和上顶点分别为 A，B，四边形 $ABCD$ 内接于椭圆，$AB\parallel DC$．记直线 AD，BC 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：$k_1\cdot k_2$ 为定值．

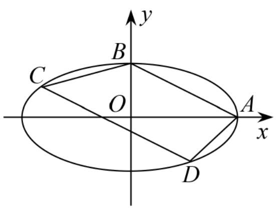

图1

（1）由个体的一题一解组成整体的一题多解

学生独立完成后，教师在课堂上通过投影展示学生的解题方法．

解法1　椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，从而 $A(2,0)$，$B(0,1)$，直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$．

因为 $AB\parallel DC$，所以可设 DC 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+m$．设 $D(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+m, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-2mx+2m^2-2=0$，所以 $x_1+x_2=2m$，从而 $x_1=2m-x_2$．

直线 AD 的斜率 $k_1=\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{-\frac{1}{2}x_1+m}{x_1-2}$，

直线 BC 的斜率 $k_2=\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{-\frac{1}{2}x_2+m-1}{x_2}$，

所以 $k_1\cdot k_2=\frac{-\frac{1}{2}x_1+m}{x_1-2}\cdot\frac{-\frac{1}{2}x_2+m-1}{x_2}=$

$\frac{\frac{1}{4}x_1x_2-\frac{1}{2}(m-1)x_1-\frac{1}{2}mx_2+m(m-1)}{(x_1-2)x_2}=$

$\frac{\frac{1}{4}x_2x_2-\frac{1}{2}m(x_1+x_2)+\frac{1}{2}x_1+m(m-1)}{x_1x_2-2x_2}=$

$\frac{\frac{1}{4}x_1x_2-\frac{1}{2}m\cdot 2m+\frac{1}{2}(2m-x_2)+m(m-1)}{x_1x_2-2x_2}=$

$\frac{\frac{1}{4}x_1x_2-\frac{1}{2}x_2}{x_1x_2-2x_2}=\frac{1}{4}$，所以 $k_1\cdot k_2$ 为定值．

解法2　设 $C(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$．因为 $AB\parallel CD$，所以 CD 的方程为 $y=-\frac{1}{2}(x-x_0)+y_0$．

联立 $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}(x-x_0)+y_0, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-(x_0+2y_0)x+2x_0y_0=0$，解得 $x=x_0$（舍去）或 $x=2y_0$，所以点 D 的坐标为 $\left(2y_0,\frac{1}{2}x_0\right)$，所以 $k_1\cdot k_2=\frac{\frac{1}{2}x_0}{2y_0-2}\cdot\frac{y_0-1}{x_0}=\frac{1}{4}$，即 $k_1\cdot k_2$ 为定值 $\frac{1}{4}$．

解法3　设 $D(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1 ①, \\ \frac{x_2^2}{4}+y_2^2=1 ②, \end{cases}$ 由①－②，得 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{1}{2}$ ③．

$\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=-\frac{1}{4}$ ④,将③代入④,得 $\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\frac{1}{2}$ ⑤.

由③和⑤解得 $x_2=2y_1$,$y_2=\frac{1}{2}x_1$,则 $k_1\cdot k_2=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{\frac{1}{2}x_1-1}{2y_1}=\frac{1}{4}$.

(2)分析整体的一题多解助力生成个体的一题多解

学生提炼各种方法的解题过程,教师同时在黑板上画出解题过程路线图:

解法 1　直线 $y=-\frac{1}{2}x+m$ 与椭圆联列→由韦达定理得 $\begin{cases}x_1+x_2=2m,\\x_1x_2=2m^2-2\end{cases}$→ $k_1k_2=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2-1}{x_2}$(四元 x_1,x_2,y_1,y_2)→直线方程消元得 $k_1k_2=\frac{-\frac{1}{2}x_1+m}{x_1-2}\cdot\frac{-\frac{1}{2}x_2+m-1}{x_2}$(三元 x_1,x_2,m)→韦达定理消元得 $k_1k_2=\frac{\frac{1}{4}x_1x_2-\frac{1}{2}x_2}{x_1x_2-2x_2}$(二元 x_1,x_2),得定值.

解法 2　直线 $y=-\frac{1}{2}(x-x_0)+y_0$ 与椭圆联列→解出点 D 的坐标为 $\left(2y_0,\frac{1}{2}x_0\right)$→ $k_1k_2=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_0-1}{x_0}$(四元 x_0,y_0,x_1,y_1)$=\frac{\frac{1}{2}x_0}{2y_0-2}\cdot\frac{y_0-1}{x_0}$(二元 x_0,y_0),得定值.

解法 3　利用点差法得 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=-\frac{1}{2}$,与 $\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\frac{1}{2}$ 联列→ $x_2=2y_1$,$y_2=\frac{1}{2}x_1$→ $k_1k_2=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2-1}{x_2}$(四元 x_1,x_2,y_1,y_2)→ $k_1k_2=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{\frac{1}{2}x_1-1}{2y_1}$(二元 x_1,y_1),得定值.

(3)让个体由"一道题的多解"学会"一类题的分析",让多解落地生根

师:这三种解法之间有什么共同点和不同点?

生 4:都用到了消元的思想,不同在于消元的方法不一样.

生 5:第一种是结合韦达定理消成关于点 D,C 横坐标 x_1 和 x_2 的式子,第二种是直线代入椭圆消成与点 C 坐标有关的式子,第三种是用点差法消成与点 D 坐标有关的式子.

师:下次再遇到这个题目时,你能独立想到这三种解法吗?

(学生小声讨论,表示比较困难)

师:老师在拿到这题时可能和大家思考的顺序不太一样,我会先写出目标式 $k_1k_2=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2-1}{x_2}$,再结合我们已有知识来思考消哪些量、用什么方法消元.

生 6:下次我要学会先从结论出发,再想有哪些方法.

师:很好!如果再给你一次选择的机会,你选哪种做法?为什么?

生 7:我会选解法 2,因为本题直线 CD 斜率已知,用点 C 坐标来表示直线方程与椭圆联列就可以用韦达定理解点 D 的坐标了.

生 8:我会选解法 3,我们知道由点差法可得点 C,D 坐标的关系式,而 CD 斜率已知,由这两个式子就可以统一点 C,D 的坐标了.

生 1:我还是会选择解法 1,因为由目标式我最先能想到的就是韦达定理的形式.

师:很好!刚才两个同学都提到本题的特征——CD 斜率已知,这样点 C,D 的坐标有一个等量关系,所以本题选择消成与点 C 或点 D 坐标有关的式子会简单一些.

3　教学反思

(1)提炼解题过程路线图,生成各种解题方法——"导之有方"

在平时的教学过程中,为了节省时间,教师往往让会做的学生来讲述解题过程.由于该生对自己的解法熟悉,对于别的同学可能存在的思维受阻点往往是一带而过的,实际的效果常常是少数优秀的学生能听明白,更多的学生还停留在似懂非懂的阶段.笔者认为,教师投影学生的解题方法后要给全体学生思考的时间,再请不同的学生来提炼解题过程路线图.动态呈现各种方法生成

(下转第 55 页)

3.4　建模过程中教师要适当引导

数学建模过程涉及到现实生活的问题或者跨学科的问题，对于学生具有挑战性，正因为如此，对培养学生的资料收集能力、自学能力、问题提出能力、创新能力具有重要作用．但考虑到学生的认知能力和实际能力，教师需要在适当时机进行引导．如夏至日和冬至日全球正午太阳高度角的计算，既是一个跨学科问题，又是一个数学内部知识之间的综合问题(圆、平行线的性质、三角函数等知识的综合)；在最后得出遮阳篷长度模型，求解最大值最小值时，需要教师来帮助完成，最简便的方式是通过几何画板作出图象，学生大概估计出一个范围；同时在误差分析上教师需要从感性分析过渡到理性分析，简要介绍人类认识地球形状的不同阶段．总之，整个建模过程要在教师不失时机的引导下完成．

参考文献

[1]　中华人民共和国教育部．义务教育数学课程标准(2011 年版)[M]．北京：北京师范大学出版社，2012．
[2]　马复．义务教育数学课程标准实验教科书·数学(九年级下册)[M]．北京：北京师范大学出版社，2012．
[3]　人民教育出版社课程教材研究所．义务教育教科书·地理(七年级上册)[M]．北京：人民教育出版社，2012．
[4]　陈琳．以学生为主体的“抛锚式”地理实践教学研究——以太阳高度角及纬度测量仪制作为例[J]．地理教学，2019(10)：56-58．
[5]　陈成，金立新，李忠美．常用纬度与地心纬度差异分析[J]．海军工程大学学报，2018，30(2)：72-77．
[6]　张维全．地理纬度与地心纬度[J]．辽宁气象，1995(1)：35-35．
[7]　胡焱，蒋秋．数学教育与 STEM(STEAM)教育的融合：机遇与挑战——基于数学教育与 STEM(STEAM)教育国际学术研讨会[J]．数学教育学报，2019，28(6)：92-94．
[8]　史宁中，王尚志．普通高中数学课程标准(2017 年版)解读[M]．北京：高等教育出版社，2018．

(上接第 44 页)

的过程能让更多学生理解方法的来龙去脉，加深对各种方法的理解．提炼别的同学的解题路线也有助于学生厘清自己的解题思路，突破自己的思维受阻点，为后面分析各种方法的异同点作好准备．

(2)对比方法间的异同，寻找多解的源头——“导之有力”

传统的一题多解的课堂往往只能让大多数学生慨叹优秀学生的厉害，能灵光一现地想到各种他们想不到的做法，而在他们的眼中各种方法还是孤立的，很难实现迁移．究其原因，往往是教师带着学生将各种思路发散开去后，并没有逆流而上寻找到多解的源头．笔者认为，在一题多解的教学中各种解法固然重要，但引导学生通过分析对比方法的异同，直击问题本质、追本溯源更为重要．以本节课为例，重要之处就在于引导学生思考出我们是对目标式 $k_1k_2=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2-1}{x_2}$ 采用了不同的消元方式，从而产生了不同的解题方法．引导学生的思维经历由原题到多解的发散，再由多法归因收敛的双向过程，真正实现班级整体的多解到个体多解的转变．

(3)由一道题多解生成一类题多解、优解——“导之有效”

一道题的多解不是教学的终极目标，教师应该通过对一题多解的分析，让学生养成科学的思维方式，拓宽学生的思维宽度，延展学生的思维深度．以本节课为例，通过对这道题的分析，让学生学会在遇到解析几何中的证明定值问题时，采用“自下而上”的思维方式，从结论出发，透过对目标式的分析再结合题目的具体特征选择合理的消元方式达到一类题的多解甚至优解．如果教师能长期坚持这样做，一定能让每道题的多种解法在更多学生的心中落地生根，优化他们的思维品质，取得更好的教学效果．