江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三数学

周三练习（7）　　2018. 10. 24

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆 、圆锥曲线、不等式

一. 填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

1．已知集合 $A=\{x|0<x\leqslant 2\}$，集合 $B=\{x|-1<x<2\}$，则 $A\cup B=$_____.

2．若复数 $2+\mathrm{i}=(1+\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})(a,b\in R)$, 其中 i 是虚数单位，则 $b=$ _____.

3．已知抛物线方程 $y^2=4\sqrt{2}x$，则抛物线的焦点坐标为_____.

4．已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\log_2(2x-1)}$，则函数 $f(x)$ 的定义域为_____.

5．已知向量 $\vec{a}=(1,x)$，向量 $\vec{b}=(-2,1)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则实数 $x=$ _____ .

6．若两直线 $ax+y+1=0$ 与 $x+ay+1=0$ 平行，则实数 a 的值为_____.

7．若 $\tan\beta=2\tan\alpha$，且 $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{2}{3}$，则 $\sin(\alpha-\beta)$ 的值为_____.

8．已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减，$f(\dfrac{5}{2})=0$，若 $f(2x-1)\geq 0$，则 x 的取值范围是_____ .

9．在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 的方程为 $(\mathrm{x}-1)^2+\mathrm{y}^2=5$，过点 $(0,2)$ 作圆 C 的切线，则切线的方程是_____ .

10．若以椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 $F(-c,0)$ 为圆心，c 为半径的圆与椭圆的左准线交于不同的两点，则该椭圆的离心率的取值范围是_____.

11．已知函数 $f(x)=sinx(x\in[0,\ \pi])$ 和函数 $g(x)=\dfrac{1}{2}tanx$ 的图象交于 A,B,C 三点，则 ΔABC 的面积为_____.

12．在 ΔABC 中，$\angle A=60^\circ$，M 是 AB 的中点，若 $|AC|=4$，$|BC|=2\sqrt{3}$，D 在线段 AC 上运动，则 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DM}$ 的最小值为_____ .

13．已知等边 ΔABC 的边长为 2，点 P 在线段 AC 上，若满足等式 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=\lambda$ 的点 P 有两个，则实数 λ 的取值范围是_____.

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x+\dfrac{1}{x}, & x>1\\ 2x^2-2ax+a+\dfrac{5}{8}, & x\le 1\end{cases}$ 若 $g(x)=f(x)-2a$ 有三个零点，则实数 a 的取值范围是_____.

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\cos A=\dfrac{4}{5}$，$b=5c$.

（1）求 $\sin C$ 的值；

（2）若△ABC的面积 $S=\dfrac{3}{2}\sin B\sin C$，求 a 的值.

16．已知函数 $f(x)=4\sin x\cdot\cos(x+\dfrac{\pi}{3})+\sqrt{3}$.

（1） $f(x)$ 在区间$[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{6}]$上的最大值和最小值及取得最值时 x 的值；

（2） 若方程 $f(x)-t=0$ 在 $x\in[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}]$上有唯一解，求实数 t 的取值范围.

17．已知函数 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}(k+1)x^2+3kx+1$，其中 $k\in\mathbf{R}$．

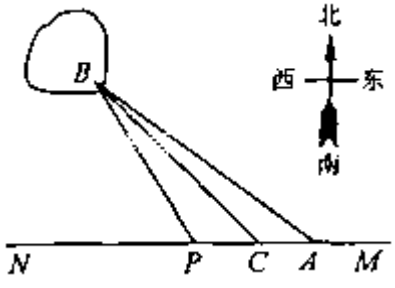
（1）当 $k=3$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $[0,5]$ 上的值域；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最小值为 3，求实数 k 的取值范围．

18. 如图，已知 A,B 两镇分别位于东西湖岸 MN 的 A 处和湖中小岛的 B 处，点 C 在 A 的正西方向 1km 处，$\tan\angle BAN=\frac{3}{4}$，$\angle BCN=\frac{\pi}{4}$，现计划铺设一条电缆联通 A,B 两镇，有两种铺设方案：①沿线段 AB 在水下铺设；②在湖岸 MN 上选一点 P，先沿线段 AP 在地下铺设，再沿线段 PB 在水下铺设，预算地下、水下的电缆铺设费用分别为 2 万元/km、4 万元/km．

（1）求 A,B 两镇间的距离；

（2）应该如何铺设，使总铺设费用最低？



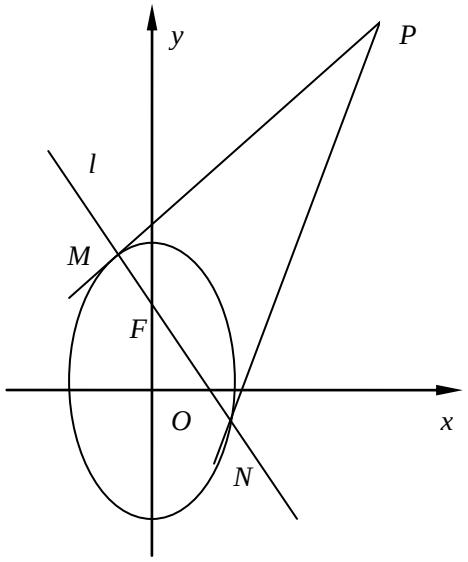
19．已知椭圆C：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，且上焦点为$F(0,1)$，过$F$的动直线$l$与椭圆$C$相交于$M$、$N$两点．设点$P(3,4)$，记$PM$、$PN$的斜率分别为$k_1$和$k_2$．

（1）求椭圆C的方程；

（2）如果直线l的斜率等于-1，求$k_1\cdot k_2$的值；

（3）探索$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$是否为定值？如果是，求出该定值；

如果不是，求出$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$的取值范围．



20．已知函数 f（x） = $(ax^2+x)e^x$, 其中 e 是自然对数的底数，$a\in R$.

(1)若 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，当 a>0 时，解关于 x 的不等式 $f'(x)>e^x$;

(2)若 $f(x)$ 在[-1, 1]上是单调增函数，求 a 的取值范围；

(3)当 a = 0 时，求整数 k 的所有值，使方程 $f(x)=x+2$ 在[k, k+1]上有解.

江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三数学

周三练习（7）参考答案

2018. 10. 24

1．$(-1,2]$　2．$-\frac{1}{2}$　3．$(\sqrt{2},0)$　4．$\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$　5．2　6．-1

7．$-\frac{1}{3}$　8．$\left[-\frac{3}{4},\frac{7}{4}\right]$　9．$x-2y+4=0$　10．$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$　11．$\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$

12．$\frac{23}{16}$　13．$-\frac{1}{4}<\lambda\le 0$　14．$\left(2,\frac{7}{2}\right]$

15．解：（1）∵ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=26c^2-10c^2\times\frac{4}{5}=18c^2$，∴ $a=3\sqrt{2}c$．　……2 分

∵ $\cos A=\frac{4}{5}$，$0<A<\pi$，∴ $\sin A=\frac{3}{5}$．∵ $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，∴ $\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{c\times\frac{3}{5}}{3\sqrt{2}c}=\frac{\sqrt{2}}{10}$．……7 分

（2）∵ $b=5c$，∴ $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{b}{c}=5$，$\sin B=5\sin C$．∴ $\frac{3}{2}\sin B\sin C=\frac{15}{2}\sin^2 C=\frac{3}{20}$．　……10 分

又∵ $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3}{2}c^2=\frac{a^2}{12}$，　∴ $\frac{a^2}{12}=\frac{3}{20}$，　∴ $a=\frac{3\sqrt{5}}{5}$．　……14 分

16．解：(1) f(x)＝4sin x$\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\sin^2 x+\sqrt{3}$

＝sin 2x＋$\sqrt{3}$cos 2x＝2sin$\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.　4 分

因为$-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{6}$，所以$-\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{2\pi}{3}$，所以$-\frac{1}{2}\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$，所以$-1\le f(x)\le 2$，

当$2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}$，即 $x=-\frac{\pi}{4}$时，$f(x)_{min}=-1$；

当$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{12}$时，$f(x)_{max}=2$.　7 分

(2) 因为$-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{12}$时，$-\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}$，所以$-1\le 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le 2$，且单调递增；

$\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{\pi}{2}$时，$\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{4\pi}{3}$，所以$-\sqrt{3}\le 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le 2$，且单调递减，

所以 f(x)＝t 有唯一解时对应 t 的范围是 t∈[$-\sqrt{3}$，-1)或 t＝2.　14 分

17．解：（1）当 $k=3$ 时，$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$，$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$，

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=1,x_2=3$，列表：

x	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,5)$	5

$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	1	↗	极大值 5	↘	极小值 1	↗	21

由上表知，函数 $f(x)$ 的值域为 $[1,21]$．……6 分

（2） $f'(x)=3x^2-3(k+1)x+3k=3(x-1)(x-k)$，

① 当 $k\le 1$ 时， $\forall x\in[1,2], f'(x)\ge 0$，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=1-\frac{3}{2}(k+1)+3k+1=3$，即 $k=\frac{5}{3}$（舍）．……8 分

② 当 $k\ge 2$ 时， $\forall x\in[1,2], f'(x)\le 0$，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 单调递减，

所以 $f(x)_{\min}=f(2)=8-6(k+1)+3k\cdot 2+1=3$，符合题意．……10 分

③ 当 $1<k<2$ 时，

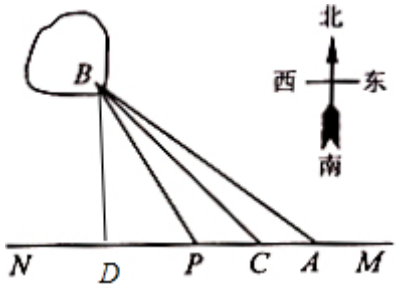
当 $x\in[1,k)$ 时， $f'(x)<0$ $f(x)$ 区间在 $[1,k)$ 单调递减；

当 $x\in(k,2]$ 时， $f'(x)>0$ $f(x)$ 区间在 $(k,2]$ 单调递增．

所以 $f(x)_{\min}=f(k)<f(2)=3$，不符合题意．

综上所述：实数 k 取值范围为 $k\ge 2$．……14 分

18．解：（1）过 *B* 作 *MN* 的垂线，垂足为 *D*，如图示：



在 $Rt\Delta ABD$ 中， $\tan\angle BAD=\tan\angle BAN=\frac{BD}{AD}=\frac{3}{4}$，

所以 $AD=\frac{4}{3}BD$，

在 $Rt\Delta CBD$ 中， $\tan\angle BCD=\tan\angle BCN=\frac{BD}{CD}=1$，

所以 *CD*=*BD*．则 $AC=AD-CD=\frac{4}{3}BD-BD=\frac{1}{3}BD=1$，即 *BD*=3，

所以 *CD*=3，*AD*=4，

由勾股定理得， $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=5$（*km*）．所以 *A*，*B* 两镇间的距离为 5*km*．…（4 分）

（2）方案①：沿线段 *AB* 在水下铺设时，总铺设费用为 5×4=20（万元）．…（6 分）

方案②：设∠*BPD*=θ，则 $\theta\in\left(\theta_0,\frac{\pi}{2}\right)$，其中 θ_0=∠*BAN*，

在 $Rt\Delta PBD$ 中，$DP=\dfrac{BD}{\tan\theta}=\dfrac{3}{\tan\theta}$，$BP=\dfrac{BD}{\sin\theta}=\dfrac{3}{\sin\theta}$，所以 $AP=4-DP=4-\dfrac{3}{\tan\theta}$.

则总铺设费用为 $2AP+4BP=8-\dfrac{6}{\tan\theta}+\dfrac{12}{\sin\theta}=8+6\cdot\dfrac{2-\cos\theta}{\sin\theta}$. …（8 分）

设 $f(\theta)=\dfrac{2-\cos\theta}{\sin\theta}$，则 $f'(\theta)=\dfrac{\sin^2\theta-(2-\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{1-2\cos\theta}{\sin^2\theta}$，

令 $f'(\theta)=0$，得 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，列表如下：

θ	$\left(\theta_0,\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$	−	0	+
$f(\theta)$	↘	极小值	↗

所以 $f_{\min}(\theta)=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

所以方案②的总铺设费用最小为 $8+6\sqrt{3}$（万元），此时 $AP=4-\sqrt{3}$. …（12 分）

而 $8+6\sqrt{3}<20$，

所以应选择方案②进行铺设，点 *P* 选在 *A* 的正西方向 $4-\sqrt{3}$ *km* 处，总铺设费用最低.

19．**解：**（1）$\because e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，$c=1$，$\therefore a=2,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 椭圆方程为 $\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1.$ …… (3 分)

（2）因为直线 MN 的斜率等于 -1，且经过焦点 F，

所以直线 $MN:y=-x+1$， …… （4 分）

设 $M(x_1,\ y_1)$、$N(x_2,\ y_2)$，

由 $\begin{cases}y=-x+1\\ \dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1\end{cases}$ 消 y 得 $7x^2-6x-9=0$，

则有 $x_1+x_2=\dfrac{6}{7}$，$x_1\cdot x_2=-\dfrac{9}{7}$. …… （7 分）

所以 $k_1\cdot k_2=\dfrac{y_1-4}{x_1-3}\cdot\dfrac{y_2-4}{x_2-3}=\dfrac{-x_1-3}{x_1-3}\cdot\dfrac{-x_2-3}{x_2-3}=\dfrac{x_1x_2+3(x_1+x_2)+9}{x_1x_2-3(x_1+x_2)+9}=2.$ （10 分）

（3）当直线 MN 的斜率不存在时， $M(0,\ 2)$， $N(0,\ -2)$，

则 $k_1=\dfrac{4-2}{3-0}=\dfrac{2}{3}$， $k_1=\dfrac{4+2}{3-0}=2$，故 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=2$. ……(11 分)

当直线 MN 的斜率存在时，设其为 k，

则直线 MN： $y=kx+1$，

设 $M(x_1,\ y_1)$， $N(x_2,\ y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx+1\\ \dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1\end{cases}$ 消 y 得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+(4k^2-12)=0$， …… (13 分)

则有 $x_1+x_2=-\dfrac{6k}{3k^2+4}$， $x_1\cdot x_2=-\dfrac{9}{3k^2+4}$.

所以 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=\dfrac{x_1-3}{y_1-4}+\dfrac{x_2-3}{y_2-4}=\dfrac{x_1-3}{kx_1-3}+\dfrac{x_2-3}{kx_2-3}=\dfrac{(x_1-3)(kx_2-3)+(x_2-3)(kx_1-3)}{(kx_1-3)(kx_2-3)}$

$=\dfrac{2kx_1x_2-3(k+1)(x_1+x_2)}{k^2x_1x_2-3k(x_1+x_2)+9}$ …… (14 分)

$=\dfrac{-2k\cdot\dfrac{9}{3k^2+4}+3(k+1)\cdot\dfrac{6k}{3k^2+4}+18}{-k^2\cdot\dfrac{9}{3k^2+4}+3k\cdot\dfrac{6k}{3k^2+4}+9}=\dfrac{72(k^2+1)}{36(k^2+1)}=2.$

所以 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}$ 为定值，且定值为 2. …… (16 分)

20．解：（1）f′（x）=[ax²+（2a+1）x+1]e^x>e^x，

又∵e^x>0，a＞0，所以不等式可化为 ax²+（2a+1）x+1>1，

∴x>0 或 $x<-\dfrac{2a+1}{a}$ ……4 分

（2）f′（x）=[ax2+（2a+1）x+1]ex，

①当 a=0 时，f′（x）=（x+1）ex，f′（x）≥0 在[-1，1]上恒成立，当且仅当 x=-1 时取等号，故 a=0 符合要求； ……5 分

②当 a≠0 时，令 g（x）=ax2+（2a+1）x+1，

因为△=（2a+1）2-4a=4a2+1＞0，所以 g（x）=0 有两个不相等的实数根 x1，x2，

不妨设 x1＞x2，因此 f（x）有极大值又有极小值．

若 a＞0，因为 g（-1）g（0）=-a＜0，所以 f（x）在（-1，1）内有极值点，

故 f（x）在[-1，1]上不单调．……7 分

若 a＜0，可知 x1＞0＞x2，因为 g（x）的图象开口向下，要使 f（x）在[-1，1]上单调，

因为 g（0）=1＞0，所以必须满足 $g(1)\geqslant 0, g(-1)\geqslant 0$;即 3a+2≥0，-a≥0

，所以$-\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant 0$.

综上可知，a 的取值范围是[$-\frac{2}{3}$，0]．

（3）当 a=0 时，方程即为 $xe^x=x+2$，由于 $e^x>0$，所以 x=0 不是方程的解，所以原方程等价于 $e^x-\frac{2}{x}$ -1=0，……12 分

令 h（x）=$e^x-\frac{2}{x}$-1，因为 h′（x）=$e^x+\frac{2}{x^2}$＞0 对于 x≠0 恒成立，

所以 h（x）在（-∞，0）和（0，+∞）内是单调增函数，

又 h（1）=e-3＜0，h（2）=e^2-2＞0，h（-3）=$e^{-3}-\frac{1}{3}$＜0，h（-2）=e^{-2}＞0，

所以方程 f（x）=x+2 有且只有两个实数根，且分别在区间[1，2]和[-3，-2]上，所以整数 t 的所有值为{-3，1}．……16 分