

班级_____姓名_____学号_____日期_____

一、填空题：

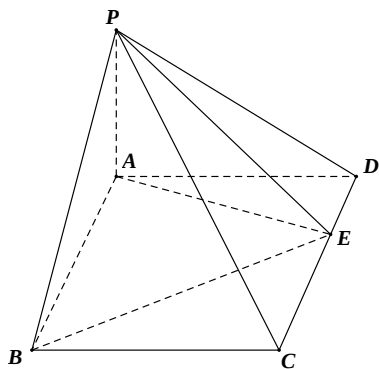
1. 已知 $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

2. 若复数 $z = (1+i)(1-ai)$ (i 为虚数单位) 为纯虚数, 则实数 $a =$ _____.

3. 某校对全校男女学生共 1600 名进行健康调查, 选用分层抽样法抽取一个容量为 200 的样本. 已知女生比男生少抽了 10 人, 则该校的女生人数为_____人.

4. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} y \leq x-1 \\ x \leq 3 \\ x+y \geq 2 \end{cases}$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值是_____.

5. 如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是矩形, $AB=2$, $AD=3$, 点 E 为棱 CD 上一点, 若三棱锥 $E-PAB$ 的体积为 4, 则 PA 的长为_____.



6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - x, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$, 则不等式 $f(x) < f\left(\frac{2}{x}\right)$ 的解集是_____.

7. 双曲线的两个焦点为 F_1, F_2 , 以 F_1F_2 为边作正方形 F_1F_2MN , 且此双曲线恰好经过边 F_1N 和 F_2M 的中点, 则此双曲线的离心率为_____.

8. 已知平行于 x 轴的直线与函数 $f(x) = \sin x (0 < x < \pi)$ 分别交于点 M, N , 设点 $A(\pi, 0)$, 梯形 $OMNA$ 的面积为 S (O 为坐标原点). 设点 M 的横坐标为 x_0 , $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$, 当 S 取得最大值时, $x_0 + \tan x_0$ 的值为_____.

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 直线 $l: x + ay - 3 = 0 (a > 0)$, 过直线 l 上一点 P 作圆 O 的切线, 切点为 M, N , 且 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = \frac{2}{3}$, 则正实数 a 的取值范围是_____.

10. 在斜三角形 ABC 中, $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + 2 \tan C = 0$, 则 $\tan C$ 的最大值是_____.

11. 在平面凸四边形 $ABCD$ 中, $AB = 2\sqrt{2}$, $CD = 3$, 点 E 满足 $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{EC}$, 且 $AE = BE = 2$. 若 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EC} = \frac{8}{5}$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为_____.

12. 已知 $\{a_n\}$ 为各项均为正整数的等差数列, $a_1 + a_{27} = 572$, 且存在正整数 m , 使 a_1, a_{14}, a_m 成等比数列, 则所有满足条件的 $\{a_n\}$ 的公差的和为_____.

二、解答题:

1. 设向量 $\mathbf{m} = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\mathbf{n} = (2\sqrt{2} + \sin \theta, 2\sqrt{2} - \cos \theta)$, $\theta \in (-\frac{3}{2}\pi, -\pi)$, 若 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2}$.

(1) 求 $\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ 的值;

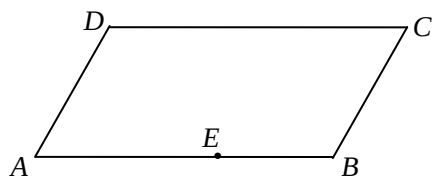
(2) 求 $\cos(\theta + \frac{7\pi}{12})$ 的值.

2. 下图是一块平行四边形园地 $ABCD$, 经测量, $AB = 20m$, $BC = 10m$, $\angle ABC = 120^\circ$. 拟过线段 AB 上一点 E 设计一条直路 EF (点 F 在四边形 $ABCD$ 的边上, 不计路的宽度), 将该园地分为面积之比为 3:1 的左、右两部分分别种植不同花卉. 设 $EB = x, EF = y$ (单位: m).

(1) 当点 F 与点 C 重合时, 试确定点 E 的位置;

(2) 求 y 关于 x 的函数关系式;

(3) 请确定点 E, F 的位置,



(第 2 题)

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上、下顶点分别为 A, B , 点 A 到焦点的距离为 2, 右准线方程为 $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆方程;

(2) 点 C 是椭圆上异于 A, B 的任意一点, 过点 C 作 $CD \perp y$ 轴于 D , E 为线段 CD 的中点. 直线 AE 与直线 $y = -1$ 交于点 F , 点 G 为线段 BF 的中点. 求 $\angle OEG$ 的大小;

(3) 点 P, M, N 为椭圆上三点, 且 PM, PN 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$, 求 M, N 的横坐标之和.

附加题:

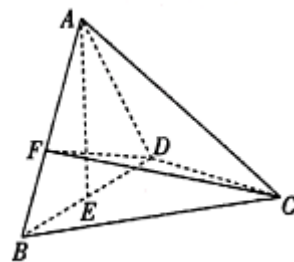
1. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$. 若矩阵 C 满足 $AC = B$, 求矩阵 C 的特征值和相应的特征向量.

2. 以平面直角坐标系的原点为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，两种坐标系中取相同的长度单位. 已知直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x=t, \\ y=t-3 \end{cases}$ (t 为参数)，圆 C 的极坐标方程是 $\rho=4\cos\theta$ ，求直线 l 被圆 C 截得的弦长.

3. 如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中， $\triangle ABD$ ， $\triangle BCD$ 都是边长为 2 的等边三角形， E 为 BD 的中点，且 $AE \perp$ 平面 BCD ， F 为线段 AB 上一动点，记 $\frac{BF}{BA} = \lambda$.

(1) 当 $\lambda = \frac{1}{3}$ 时，求异面直线 DF 与 BC 所成角的余弦值；

(2) 当 CF 与平面 ACD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{10}$ 时，求 λ 的值.



热身练 3 参考答案

1. $\{2, 4\}$ 2. -1 3. 760 4. $\frac{2}{3}$ 5. 4 6. $\{x | x < -\sqrt{2} \text{ 或 } 0 < x < \sqrt{2}\}$ 7. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
8. π 9. $[\sqrt{2}, +\infty)$ 10. $-\sqrt{3}$ 11. 2 12. 61

1. (1) 因为 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2}$

所以, $(2\sqrt{2} + \sin \theta) \cos \theta + (2\sqrt{2} - \cos \theta) \sin \theta = \frac{1}{2}$

化简, 得: $2\sqrt{2} \cos \theta + 2\sqrt{2} \sin \theta = \frac{1}{2}$,

即 $\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{8}$

(2) $\theta \in (-\frac{3}{2}\pi, -\pi)$

$\theta + \frac{\pi}{4} \in (-\frac{5}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi)$

由 $\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{8}$, $\theta + \frac{\pi}{4} \in (-\frac{5}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi)$,

所以, $\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{1 - (\frac{1}{8})^2} = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$,

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \frac{7\pi}{12}) &= \cos(\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) = \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \cos \frac{\pi}{3} + \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \sin \frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{3\sqrt{7}}{8} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{7} + \sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$

2. (1) 当点 F 与点 C 重合时,

由题设知, $S_{\triangle BEC} = \frac{1}{4} S_{\square ABCD}$,

于是 $\frac{1}{2} EB \cdot h = \frac{1}{4} AB \cdot h$, 其中 h 为平行四边形 AB 边上的高,

得 $EB = \frac{1}{2} AB$, 即点 E 是 AB 的中点.4 分

(2) 因为点 E 在线段 AB 上, 所以 $0 \leq x \leq 20$.

当 $10 \leq x \leq 20$ 时, 由 (1) 知, 点 F 在线段 BC 上,

因为 $AB = 20$ m, $BC = 10$ m, $\angle ABC = 120^\circ$,

所以 $S_{\square ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = 20 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}$.

由 $S_{\triangle EBF} = \frac{1}{2} x \cdot BF \cdot \sin 120^\circ = 25\sqrt{3}$ 得 $BF = \frac{100}{x}$,

所以由余弦定理得 $y = EF = \sqrt{x^2 + \left(\frac{100}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{100}{x} \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{x^2 + \frac{10000}{x^2} + 100}$.

当 $0 \leq x < 10$ 时, 点 F 在线段 CD 上,

$$\text{由 } S_{\text{四边形 } EBCF} = \frac{1}{2}(x + CF) \times 10 \times \sin 60^\circ = 25\sqrt{3} \text{ 得 } CF = 10 - x,$$

$$\text{当 } BE \geq CF \text{ 时, } EF = \sqrt{10^2 + (2x - 10)^2 - 2 \times 10 \times (2x - 10) \cdot \cos 120^\circ},$$

$$\text{当 } BE < CF \text{ 时, } EF = \sqrt{10^2 + (10 - 2x)^2 - 2 \times 10 \times (10 - 2x) \cdot \cos 60^\circ},$$

$$\text{化简均为 } y = EF = 2\sqrt{x^2 - 5x + 25}.$$

$$\text{综上, } y = \begin{cases} 2\sqrt{x^2 - 5x + 25}, & 0 \leq x < 10, \\ \sqrt{x^2 + \frac{10\,000}{x^2} + 100}, & 10 \leq x \leq 20. \end{cases} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$(3) \text{ 当 } 0 \leq x < 10 \text{ 时, } y = 2\sqrt{x^2 - 5x + 25} = 2\sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{75}{4}},$$

$$\text{于是当 } x = \frac{5}{2} \text{ 时, } y_{\min} = 5\sqrt{3}, \text{ 此时 } CF = 10 - x = \frac{15}{2};$$

$$\text{当 } 10 \leq x \leq 20 \text{ 时, } y = \sqrt{x^2 + \frac{10\,000}{x^2} + 100} \geq \sqrt{2\sqrt{x^2 \cdot \frac{10\,000}{x^2}} + 100} = 10\sqrt{3} > 5\sqrt{3},$$

故当 E 距 B 点 2.5m, F 距 C 点 7.5m 时, EF 最短, 其长度为 $5\sqrt{3}$ m. 14 分

$$\text{解: (1) 由 } a=2, \frac{a^2}{c} = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \text{ 得 } c=\sqrt{3}, \text{ 有 } b^2=1, \text{ 故椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

$$(2) \text{ 设 } C(m, n), m \neq 0, \text{ 则 } D(0, n), E(\frac{m}{2}, n). \text{ 又 } \frac{m^2}{4} + n^2 = 1, \text{ 即 } m^2 = 4 - 4n^2.$$

$$\text{又 } A(0, 1), \text{ 所以直线 } AE \text{ 的方程为 } y - 1 = \frac{2(n-1)}{m}x.$$

$$\text{令 } y = -1, \text{ 得 } F(\frac{m}{1-n}, -1).$$

$$\text{又 } B(0, -1), G \text{ 为线段 } BC \text{ 的中点, 所以 } G(\frac{m}{2-2n}, -1).$$

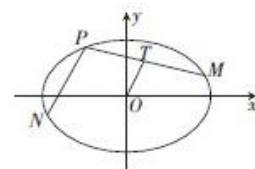
$$\text{所以 } OE = (\frac{m}{2}, n), GE = (\frac{m}{2} - \frac{m}{2-2n}, n+1).$$

$$\text{因为 } \vec{OE} \cdot \vec{GE} = \frac{m}{2}[\frac{m}{2} - \frac{m}{2(1-n)}] + n(n+1) = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{4(1-n)} + n^2 + n = \frac{4-4n^2}{4} - \frac{4-4n^2}{4(1-n)} + n^2 + n = 1 -$$

$$\frac{1-n^2}{1-n} + n = 0, \text{ 所以 } OE \perp GE, \text{ 故 } \angle OEG = 90^\circ.$$

$$(3) \text{ 设 } P(x_0, y_0), M(x_1, y_1), \text{ 则 } \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1, \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1,$$

$$\text{相减得 } \frac{(x_0 - x_1)(x_0 + x_1)}{4} + (y_0 - y_1)(y_0 + y_1) = 0,$$



3.

$$\text{设 } PM \text{ 的中点为 } T, \text{ 则有 } k_{PM}k_{OT} = -\frac{1}{4}, \text{ 又 } k_{PM}k_{PN} = -\frac{1}{4},$$

故 $PN \parallel OT$, 得 MN 的中点在 OT 上.

同理, 取 PN 的中点 S , 有 MN 的中点在 OS 上, 故 O 为 MN 的中点, 即 M, N 的横坐标之和为 0.

21. 解: 设 $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 由 $AC=B$, 即 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$,

得 $\begin{cases} a+c=0, \\ -c=1, \\ b+d=6, \\ -d=-4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=2, \\ c=-1, \\ d=4. \end{cases}$ 所以 $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

设 $f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$,

令 $f(\lambda)=0$, 得 $\lambda_1=2, \lambda_2=3$.

当 $\lambda_1=2$ 时, $x-2y=0$, 取 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

当 $\lambda_2=3$ 时, $2x-2y=0$, 取 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

22. 解: 直线 l 的参数方程 $\begin{cases} x=t, \\ y=t-3 \end{cases}$ (t 为参数) 化为直角坐标方程是 $y=x-3$,

圆 C 的极坐标方程 $\rho=4\cos\theta$ 化为直角坐标方程是 $x^2+y^2-4x=0$.

圆 C 的圆心 $(2,0)$ 到直线 $x-y-3=0$ 的距离为 $d = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

又圆 C 的半径 $r=2$,

附加: 所以直线 l 被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2} = \sqrt{14}$.

23. 解: 连接 CE , 以 EB, EC, EA 分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$,

则 $A(0,0,\sqrt{3}), B(1,0,0), C(0,\sqrt{3},0), D(-1,0,0)$.

因为 F 为线段 AB 上一动点, 且 $\frac{BF}{BA} = \lambda$,

则 $\overrightarrow{BF} = \lambda \overrightarrow{BA} = \lambda(-1,0,\sqrt{3}) = (-\lambda,0,\sqrt{3}\lambda)$, 所以 $F(1-\lambda,0,\sqrt{3}\lambda)$.

(1) 当 $\lambda = \frac{1}{3}$ 时, $F(\frac{2}{3},0,\frac{\sqrt{3}}{3}), \overrightarrow{DF} = (\frac{5}{3},0,\frac{\sqrt{3}}{3}), \overrightarrow{CB} = (1,-\sqrt{3},0)$,

所以 $\cos\langle \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{CB} \rangle = \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{(\frac{5}{3})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{5\sqrt{7}}{28}$.

(2) $\overrightarrow{CF} = (1-\lambda, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\lambda)$,

设平面 ACD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

由 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{DA}, \mathbf{n} \perp \overrightarrow{DC}$, 得 $\begin{cases} (x,y,z) \cdot (1,0,\sqrt{3}) = 0 \\ (x,y,z) \cdot (1,\sqrt{3},0) = 0 \end{cases}$, 化简得 $\begin{cases} x + \sqrt{3}z = 0 \\ x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$, 取 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, -1, -1)$.

设 CF 与平面 ACD 所成角为 θ ,

则 $\sin\theta = |\cos\langle \overrightarrow{CF}, \mathbf{n} \rangle| = \left| \frac{2\sqrt{3}(1-\lambda)}{\sqrt{(1-\lambda)^2 + 3 + (\sqrt{3}\lambda)^2} \times \sqrt{5}} \right| = \frac{\sqrt{15}}{10}$.

解得 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 $\lambda = 2$ (舍去), 所以 $\lambda = \frac{1}{2}$.

