专题10　分段函数的研究

一、题型选讲

题型一、含义抽象函数的求值问题

含有抽象函数的分段函数，在处理里首先要明确目标，即让自变量向有具体解析式的部分靠拢，其次要理解抽象函数的含义和作用（或者对函数图象的影响）

例1、(2019南京三模）若函数$f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0\\ f(x-2), & x>0\end{cases}$，则$f(\log_2 3)=$______.

例2：设函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\cos\pi x, x>0\\ f\left(x+1\right)-1, x\le 0\end{cases}$，则$f\left(-\dfrac{10}{3}\right)$的值为________

题型二 与分段函数有关的方程或不等式

含分段函数的不等式在处理上通常是两种方法：一种是利用代数手段，通过对x进行分类讨论将不等式转变为具体的不等式求解。另一种是通过作出分段函数的图象，数形结合，利用图像的特点解不等式

例3、(2019苏锡常镇调研)．已知函数$f(x)=\begin{cases}\log_2(3-x), & x\leqslant 0,\\ 2^x-1, & x>0,\end{cases}$若$f(a-1)=\dfrac{1}{2}$,则实数a＝________.

例4、(2019苏北四市、苏中三市三调） 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\geqslant 0,\\ -x^2-2x, & x<0,\end{cases}$则不等式$f(x)>f(-x)$的解集为____.

题型三、分段函数的值域

分段函数的定义域与值域——各段的并集

例5、（2016苏州期末）函数$f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0,\\ -x^2+1, & x>0\end{cases}$的值域为________.

例6、(2018无锡期末） 已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2}, & x\leqslant -\dfrac{1}{2},\\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1+x}{2}\right), & x>-\dfrac{1}{2},\end{cases}$ $g(x)=-x^2-2x-2$.若存在a∈**R**，使得$f(a)+g(b)=0$，则实数b的取值范围是________.

题型四　分段函数的单调性

分段函数单调性的判断：先判断每段的单调性，如果单调性相同，则需判断函数是连续的还是断开的，如果函数连续，则单调区间可以合在一起，如果函数不连续，则要根据函数在两段分界点出的函数值（和临界值）的大小确定能否将单调区间并在一起。

例 7、已知函数 $f(x)=\begin{cases}(a-2)x-1 & (x\le 1)\\ \log_a x & (x>1)\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 单调递增，则实数 a 的取值范围是

____

题型五 分段函数的零点问题

分段函数的零点，有时需要对新函数如何构建是关键，通常的原则是：一是两个新函数图像是常见初等函数图像，二是一个函数图像是定的，另一个函数图像是动的，三是参数放在直线型中，即定曲线动直线，这样便于解决问题，基于这三点

例 8、(2017 苏锡常镇调研）若函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^x}-1, & x<1,\\ \frac{\ln x}{x^2}, & x\geqslant 1,\end{cases}$)则函数 $y=|f(x)|-\frac{1}{8}$的零点个数为________.

例 9、(2019 扬州期末）已知函数 $f(x)=a+3+\frac{4}{x}-|x+a|$有且仅有三个零点，并且这三个零点构成等差数列，则实数 a 的值为________.

题型六　分段函数中求参问题

函数、方程和不等式的综合题，常以研究函数的零点、方程的根、不等式的解集的形式出现，大多数情况下会用到等价转化、数形结合的数学思想解决问题，而这里的解法是通过严谨的等价转化，运用纯代数的手段来解决问题的，对抽象思维和逻辑推理的能力要求较高，此题也可通过数形结合的思想来解决问题，可以一试.

例 10、(2019 苏锡常镇调研）　已知函数 $f(x)=x^2+|x-a|$，$g(x)=(2a-1)x+a\ln x$，若函数 $y=f(x)$与函数 $y=g(x)$的图像恰好有两个不同的交点，则实数 a 的取值范围为________.

例 11、(2018 南京、盐城一模）设函数 f(x)是偶函数，当 x⩾0 时，$f(x)=\begin{cases}x(3-x), & 0\leqslant x\leqslant 3,\\ -\frac{3}{x}+1, & x>3,\end{cases}$ 若函数 $y=f(x)-m$ 有四个不同的零点，则实数 m 的取值范围是________.

例 12、(2018 镇江期末）已知 k 为常数，函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x+1}, & x\leqslant 0,\\ |\ln x|, & x>0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 f(x)＝kx＋2 有且只有四个不同解，则实数 k 的取值构成的集合为________.

题型七 数列中分段函数奇偶性讨论问题

数列中分段函数奇偶性四指对 n 为奇函数和偶函数两种情况进行讨论。

例 13、(2016 扬州期末） 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=a(0<a\leqslant 2)$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-2, & a_n>2,\\ -a_n+3, & a_n\leqslant 2\end{cases}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，若 $S_n=2015$，则 $n=$________.

二、达标训练

1、(2019 苏州期初调查）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\geqslant 0,\\ -x^2+ax, & x<0,\end{cases}$ 为奇函数，则实数 a 的值等于________.

2、(2016 南京、盐城、连云港、徐州二模） 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+1, & x\leqslant 0,\\ -(x-1)^2, & x>0,\end{cases}$ 则不等式 $f(x)\geqslant -1$ 的解集是________.

3、(2016 苏州暑假测试）已知实数 $m\neq 0$，函数 $f(x)=\begin{cases}3x-m, & x\leqslant 2,\\ -x-2m, & x>2,\end{cases}$ 若 $f(2-m)=f(2+m)$，则 m 的值为________.

4、(2018 苏锡常镇调研）已知函数 $f(x)=\begin{cases}a-e^x, & x<1,\\ x+\dfrac{4}{x}, & x\geqslant 1\end{cases}$ (e 是自然对数的底)．若函数 y＝f(x)的最小值是 4，则实数 a 的取值范围为________.

5、(2018 扬州期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(-x+1)-1, & x\in[-1,k],\\ -2|x-1|, & x\in(k,a],\end{cases}$ 若存在实数 k 使得该函数的值域为[－2，0]，则实数 a 的取值范围是________.

6、(2017 南通、扬州、淮安、宿迁、泰州、徐州六市二调） 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x+m, \\ x<0, \\ x^2-1, \\ x\geqslant 0,\end{cases}$)其中 $m>0$，若函数 $y=f(f(x))-1$ 有 3 个不同的零点，则实数 m 的取值范围是________.

7、(2017 南通一调） 已知函数 $f(x)=|x|+|x-4|$，则不等式 $f(x^2+2)>f(x)$的解集用区间表示为________.

8、(2017 常州期末）若函数 $f(x)=\left|\frac{e^x}{2}-\frac{a}{e^x}\right|$ $(a\in\mathbf{R})$在区间[1,2]上单调递增，则实数 a 的取值范围是________.

9、(2017 南通、扬州、泰州、淮安三调）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant a,\\ x^3-3x, & x<a.\end{cases}$ 若函数 $g(x)=2f(x)-ax$ 恰有 2 个不同的零点，则实数 a 的取值范围是____.

专题 10 分段函数的研究

一、题型选讲

题型一、含义抽象函数的求值问题

含有抽象函数的分段函数，在处理里首先要明确目标，即让自变量向有具体解析式的部分靠拢，其次要理解抽象函数的含义和作用（或者对函数图象的影响）

例 1、(2019 南京三模）若函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0\\ f(x-2), & x>0\end{cases}$，则 $f(\log_2 3)=$______.

【答案】. $\frac{3}{4}$

【解析】因为 1＜$\log_2 3$＜2，所以 $f(\log_2 3)$＝$f(\log_2 3-2)$＝ $2^{\log_2 3-2}=\frac{2^{\log_2 3}}{2^2}=\frac{3}{4}$.

例 2：设函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\pi x, x>0\\ f(x+1)-1, x\le 0\end{cases}$，则 $f\left(-\frac{10}{3}\right)$的值为________

【答案】$-\frac{9}{2}$

【解析】思路：由 $f(x)$ 解析式可知，只有 $x>0$，才能得到具体的数值，$x<0$ 时只能依靠 $f(x)=f(x+1)-1$向 $x>0$ 正数进行靠拢。由此可得：

$f\left(-\frac{10}{3}\right)=f\left(-\frac{7}{3}\right)-1=f\left(-\frac{4}{3}\right)-2=f\left(-\frac{1}{3}\right)-3=f\left(\frac{2}{3}\right)-4$，而

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\quad \therefore f\left(-\frac{10}{3}\right)=-\frac{9}{2}$

题型二 与分段函数有关的方程或不等式

含分段函数的不等式在处理上通常是两种方法：一种是利用代数手段，通过对 x 进行分类讨论将不等式转变为具体的不等式求解。另一种是通过作出分段函数的图象，数形结合，利用图像的特点解不等式

例 3、(2019 苏锡常镇调研). 已知函数 f(x)＝$\begin{cases}\log_2(3-x), & x\leqslant 0,\\ 2^x-1, & x>0,\end{cases}$ 若 f(a－1)＝$\frac{1}{2}$, 则实数 a＝________.

【答案】 $\log_2 3$

【解析】当 a－1≤0，即 a≤1 时，f(a－1)＝$\log_2(4-a)$＝$\frac{1}{2}$，解得 a＝4－$\sqrt{2}$(舍)；当 a－1>0，即 a>1 时，f(a－1)＝$2^{a-1}-1$＝$\frac{1}{2}$，解得 a＝$\log_2 3$.

解后反思 本题以分段函数为背景，考查指数及对数的基本运算及分类讨论的数学思想.

例 4、(2019 苏北四市、苏中三市三调） 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\geqslant 0,\\ -x^2-2x, & x<0,\end{cases}$ 则不等式 $f(x)>f(-x)$ 的解集为____.

【答案】$(-2,0)\cup(2,+\infty)$

【解析】：若 $x\ge 0$，则 $f(x)=x^2-2x, f(-x)=-x^2+2x$，由 $f(x)>f(-x)$ 得：

$x^2-2x>-x^2+2x \Rightarrow x>2$，故 $x>2$.

若 $x<0$，则 $f(x)=-x^2-2x, f(-x)=x^2+2x$，由 $f(x)>f(-x)$ 得：

$-x^2-2x>x^2+2x \Rightarrow -2<x<0$，故 $-2<x<0$.

综上，不等式 $f(x)>f(-x)$ 的解集为_$(-2,0)\cup(2,+\infty)$.

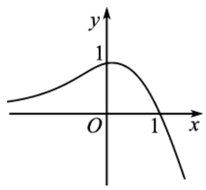
题型三、分段函数的值域

分段函数的定义域与值域——各段的并集

例 5、(2016 苏州期末）函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0,\\ -x^2+1, & x>0\end{cases}$ 的值域为________.

【答案】 $(-\infty，1]$

【解析】**思路分析** 先画出图像看看.



分段画出 $f(x)$的图像即可看出函数的值域为$(-\infty，1]$.

解后反思 能快速画出图像的题，尽量先画图像，对于填空题非常有用.

例 6、(2018 无锡期末） 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2}, & x\leqslant -\dfrac{1}{2},\\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1+x}{2}\right), & x>-\dfrac{1}{2},\end{cases}$ $g(x)=-x^2-2x-2$.若存在 a∈**R**，使得 $f(a)+g(b)=0$，则实数 b 的取值范围是________.

【答案】. $(-2，0)$

【解析】**思路分析** 根据条件可以将问题等价转化为关于函数 y＝f(a)的值域问题，然后利用分段函数的值域求法和一元二次不等式的解法处理即可.

由题意，存在 a∈**R**，使得 $f(a)=-g(b)$，令 $h(b)=-g(b)=b^2+2b+2$.

当 $a\leqslant -\frac{1}{2}$时，$f(a)=\dfrac{a^2+2a-1}{a^2}=-\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{a}+1=-\left(\dfrac{1}{a}-1\right)^2+2$，因为 $a\leqslant -\frac{1}{2}$，所以$-2\leqslant\frac{1}{a}<0$，从而$-7\leqslant f(a)<1$；

当 $a>-\frac{1}{2}$时，$f(a)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1+a}{2}\right)$，因为 $a>-\frac{1}{2}$，所以$\dfrac{1+a}{2}>\dfrac{1}{4}$，从而 $f(a)<2$.

综上，函数 $f(a)$的值域是$(-\infty，2)$.

令 $h(b)<2$，即 $b^2+2b+2<2$，解得$-2<b<0$.

易错警示 此题的关键是问题的等价转化，设 f(a)的值域为集合 A，−g(b)的值域为集合 B，它们的正确

关系是 B⊆A，而不是 A⊆B.

题型四　分段函数的单调性

分段函数单调性的判断：先判断每段的单调性，如果单调性相同，则需判断函数是连续的还是断开的，如果函数连续，则单调区间可以合在一起，如果函数不连续，则要根据函数在两段分界点出的函数值（和临界值）的大小确定能否将单调区间并在一起。

例 7、已知函数 $f(x)=\begin{cases}(a-2)x-1 & (x\le 1)\\ \log_a x & (x>1)\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，则实数 a 的取值范围是________

【答案】$a\in(2,3]$

【解析】思路：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调增，则在 R 上任取 $x_1<x_2$，均有 $f(x_1)<f(x_2)$，在任取中就包含 x_1,x_2 均在同一段取值的情况，所以可得要想在 R 上单调增，起码每一段的解析式也应当是单调递增的，由此可得：$\begin{cases}a-2>0\\ a>1\end{cases}$，但仅仅满足这个条件是不够的。还有一种取值可能为 x_1,x_2 不在同一段取值，若也满足 $x_1<x_2$，均有 $f(x_1)<f(x_2)$，通过作图可发现需要左边函数的最大值不大于右边函数的最小值。代入 $x=1$，有左段≤右端，即 $a-2-1\le\log_a 1=0\Rightarrow a\le 3$

综上所述可得：$a\in(2,3]$

题型五 分段函数的零点问题

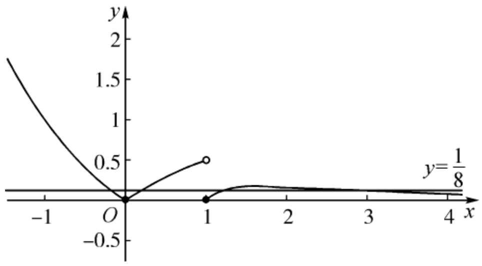
分段函数的零点，有时需要对新函数如何构建是关键，通常的原则是：一是两个新函数图像是常见初等函数图像，二是一个函数图像是定的，另一个函数图像是动的，三是参数放在直线型中，即定曲线动直线，这样便于解决问题，基于这三点

例 8、(2017 苏锡常镇调研）若函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^x}-1, \\ x<1, \\ \frac{\ln x}{x^2}, \\ x\geqslant 1,\end{cases}$)则函数 $y=|f(x)|-\frac{1}{8}$的零点个数为________.

【答案】4

【解析】设 $g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，则由 $g'(x)=\frac{x-\ln x\ 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}=0$，可得 $x=\sqrt{e}$，所以 $g(x)$在$(1,\sqrt{e})$上单调递

增，在$(\sqrt{e}，+\infty)$上单调递减，当 $x\to+\infty$时，$g(x)\to0$，故 $g(x)$在$(1，+\infty)$上的最大值为 $g(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}>\frac{1}{8}$.在同一平面直角坐标系中画出 $y=|f(x)|$与 $y=\frac{1}{8}$的图像可得，交点有 4 个，即原函数零点有 4 个.



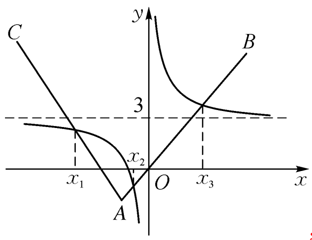
易错警示 答案中出现了 3 和 5 这两种错误结果，3 的主要原因是弄错了$(1，+\infty)$上的单调性或者忘了处理绝对值，5 的主要原因是没有发现图像趋近于 x 轴.

例 9、(2019 扬州期末）已知函数 $f(x)=a+3+\frac{4}{x}-|x+a|$有且仅有三个零点，并且这三个零点构成等差数列，则实数 a 的值为________.

【答案】$\frac{11}{6}$或$-1-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】**解法 1** 由 $f(x)=a+3+\frac{4}{x}-|x+a|=0$，得$\frac{4}{x}+3=|x+a|-a$，原函数有三个零点，即可转化为函数 $y=\frac{4}{x}+3$ 与 $y=|x+a|-a=\begin{cases} x, & x\geq -a, \\ -x-2a, & x<-a \end{cases}$ 图像有且仅有三个不同的交点，设三个交点的横坐标为 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，易知 $a\neq0$.下面分两种情况讨论：

(1)$a>0$.如图 1 所示.

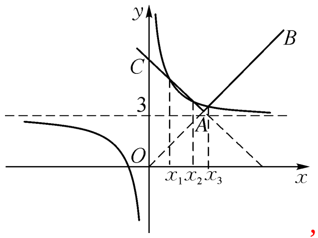


,图 1)

由$\begin{cases} y=\frac{4}{x}+3, \\ y=x, \end{cases}$ 解得 $x_2=-1$，$x_3=4$.

又三个零点构成等差数列，则 $x_2=\frac{x_1+x_3}{2}$，得 $x_1=-6$，则有$\frac{4}{-6}+3=-(-6)-2a$，解得 $a=\frac{11}{6}$符合题意.

(2)$a<0$.如图 2 所示.



,图 2)

由$\begin{cases}y=\dfrac{4}{x}+3,\\ y=x,\end{cases}$解得 $x_3=4$，由 $x_2=\dfrac{x_1+x_3}{2}$，得 $x_1-2x_2=-4$；再由$\begin{cases}y=\dfrac{4}{x}+3,\\ y=-x-2a,\end{cases}$消去 y，得 $x^2+(2a+3)x+4=0$　(*).

由根据与系数的关系得$\begin{cases}x_1+x_2=-(2a+3),\\ x_1x_2=4,\end{cases}$且 $x_1-2x_2=-4$，

解得$\begin{cases}x_1=\dfrac{-4a-10}{3},\\ x_2=\dfrac{1-2a}{3},\end{cases}$即$\dfrac{(-4a-10)(1-2a)}{9}=4$，化简得 $4a^2+8a-23=0$，综上(1)(2)可得 a 的值为 $\dfrac{11}{6}$或$-1-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$.

解得 $a=\dfrac{-2\pm3\sqrt{3}}{2}$，检验方程(*)$\Delta(2a+3)^2-16=4a^2+12a-7>0$，但 $a<0$，则 $a=\dfrac{-2-3\sqrt{3}}{2}$满足题意.

解法 2　因为 $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{4}{x}+3+2a, & x<-a,\\ -x+\dfrac{4}{x}+3, & x\geqslant-a,\end{cases}$所以由 $f(x)=-x+\dfrac{4}{x}+3=0$ 得 $x=-1$ 或 4.

(1)若$-1\geqslant-a$，即 $a\geqslant1$ 时，由于函数有三个零点，且成等差数列，所以，另一个零点 $x_0<-1$，故$-2=4+x_0$，从而 $x_0=-6$，故$-6+\dfrac{4}{-6}+3+2a=0$，解得 $a=\dfrac{11}{6}$，满足条件;

(2)若$-1<-a$，即 $a<1$ 时，设函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}+3+2a(x<-a)$的两个零点为 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，即 x_1，x_2 是方程 $x^2+(2a+3)x+4=0$　(*)的两个实数根，从而 $x_1+x_2=-2a-3$，$x_1x_2=4$，又由于三个零点成等差数列，所以 $2x_2=x_1+4$，消去 x_1，x_2 得 $4a^2+8a-23=0$，解得 $a=\dfrac{-2\pm3\sqrt{3}}{2}$，检验方程(*)$\Delta>0$，而 $a<1$，则 $a=\dfrac{-2-3\sqrt{3}}{2}$满足题意.

综上，实数 a 的值为$\dfrac{11}{6}$或$\dfrac{-2-3\sqrt{3}}{2}$.

题型六　分段函数中求参问题

函数、方程和不等式的综合题，常以研究函数的零点、方程的根、不等式的解集的形式出现，大多数情况下会用到等价转化、数形结合的数学思想解决问题，而这里的解法是通过严谨的等价转化，运用纯

代数的手段来解决问题的，对抽象思维和逻辑推理的能力要求较高，此题也可通过数形结合的思想来解决问题，可以一试.

例 10、(2019 苏锡常镇调研）已知函数 $f(x)=x^2+|x-a|$，$g(x)=(2a-1)x+a\ln x$，若函数 $y=f(x)$与函数 $y=g(x)$的图像恰好有两个不同的交点，则实数 a 的取值范围为________.

【答案】 $(1，+\infty)$

【解析】 **解法 1** 因为函数 $g(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，所以函数 $y=f(x)$与函数 $y=g(x)$的图像在区间$(0，+\infty)$上恰好有两个不同的交点．当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)=x^2+x-a$ 在$(0，+\infty)$上递增，函数 $g(x)$在$(0，+\infty)$上递减，函数 $y=f(x)$与函数 $y=g(x)$的图像在区间$(0，+\infty)$上最多有一个交点，所以 $a>0$，令 $F(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases} x^2-2ax-a\ln x+a, & 0<x<a, \\ x^2+2(1-a)x-a\ln x-a, & x\geqslant a, \end{cases}$ 因为当 $0<x<a$ 时，$F'(x)=2(x-a)-\frac{a}{x}<0$，当 $x\geqslant a$ 时，$F'(x)=2x+2-2a-\frac{a}{x}=2(x-a)+\frac{2x-a}{x}>0$，所以 $F(x)$在$(0，a)$上递减，在$(a，+\infty)$上递增，故 $F(x)_{min}=F(a)=-a^2+a-a\ln a$，结合 $F(x)$的图像可得，要使得 $F(x)$有两个零点，只需要 $F(a)<0$，即 $a-1+\ln a>0$，令 $h(a)=a-1+\ln a$，则 $h'(a)=1+\frac{1}{a}>0$，所以 $h(a)$在$(0，+\infty)$上递增，又因为 $h(1)=0$，$h\left(\frac{1}{e}\right)<0$，$h(e)>0$，所以 $a>1$，故实数 a 的取值范围为$(1，+\infty)$.

解法 2 $x^2+|x-a|=(2a-1)x+a\ln x$

$\Rightarrow x^2+|x-a|=2ax-x+a\ln x$

$\Rightarrow x^2-2ax+a^2+|x-a|=-x+a\ln x+a^2$

$\Rightarrow (x-a)2+|x-a|=-x+a\ln x+a^2$

令 $h(x)=(x-a)^2+|x-a|$，$\phi(x)=-x+a\ln x+a^2$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$n(x)=h(x)-\varphi(x)$单调递增，至多有一个零点，不符合题意.

当 $a>0$ 时，$\phi'(x)=-1+\frac{a}{x}=\frac{a-x}{x}$在$(0，a)$上单调递增，在$(a，+\infty)$上单调递减，故在 $x=a$ 处去极大值也就是最大值 $\varphi(a)$，而函数 $h(x)=(x-a)^2+|x-a|$对称轴是 $x=a$，在此处取最小值 $h(a)$.

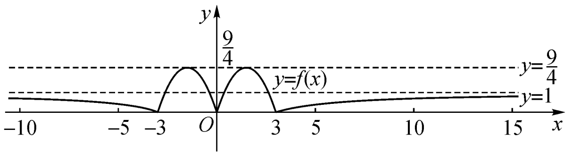
只需要 $\varphi(a)>h(a)=0$(如图所示)，即 $a\ln a-a+a^2>0\Rightarrow \ln a-1+a>0$，令 $m(a)=\ln a-1+a(a>0)$.

$m'(a)=\frac{1}{a}+1>0$，$m(a)$在$(0，+\infty)$单调递增，又 $m(1)=0$，$m(\frac{1}{e})<0$，$m(e)>0$ 故所以 $a>1$，故实数 a 的取值范围为$(1，+\infty)$.

例 11、(2018 南京、盐城一模）设函数 $f(x)$是偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\begin{cases} x(3-x), & 0\leqslant x\leqslant 3, \\ -\frac{3}{x}+1, & x>3, \end{cases}$ 若函数 $y=f(x)-m$ 有四个不同的零点，则实数 m 的取值范围是________.

【答案】. $\left[1,\ \frac{9}{4}\right)$

【解析】先画出 x≥0 时的函数图像，再利用偶函数的对称性得到 x<0 时的图像．令 y=0 得 f(x)=m.令 y=f(x)，y=m，由图像可得要有四个不同的零点，则 $m\in\left[1,\ \frac{9}{4}\right)$.

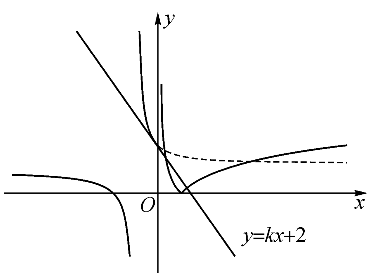


例 12、(2018 镇江期末）已知 k 为常数，函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{x+1}, & x\leqslant 0,\\ |\ln x|, & x>0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 f(x)=kx+2 有且只有四个不同解，则实数 k 的取值构成的集合为________.

【答案】 $\left\{\frac{1}{e^3}\right\}\cup(-e,\ -1)$

【解析】**思路分析** 作函数 y=f(x)和 y=kx+2 的图像，考察两函数图像的公共点，两函数图像的公共点的个数等价于方程 f(x)=kx+2 解的个数．

作函数 y=f(x)和 y=kx+2 的图像，如图所示，两图像除了(0，2)还应有 3 个公共点，当 k≥0 时，直线应与曲线 y=f(x)(x>1)相切，设切点$(x_0,\ \ln x_0)$，则切线斜率为 $k=\frac{1}{x_0}$，又 $k=\frac{\ln x_0-2}{x_0}$，则$\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0-2}{x_0}$，解得 $x_0=e^3$，此时 $k=\frac{1}{e^3}$，当 k<0 时，当 y=kx+2 与曲线 $y=\frac{x+2}{x+1}$相切于点(0，2)时，函数 y=f(x)和 y=kx+2 的图像只有三个公共点，不符合题意，此时 k=−1，当−1<k<0 时，函数 y=f(x)和 y=kx+2 的图像只有三个公共点，不符合题意，当直线 y=kx+2 与 y=f(x)(0<x<1)相切时，两图像只有三个公共点，设切点$(x_0,\ -\ln x_0)$，则切线的斜率 $k=-\frac{1}{x_0}$，又 $k=\frac{-\ln x_0-2}{x_0}$，则$-\frac{1}{x_0}=\frac{-\ln x_0-2}{x_0}$，解得 $x_0=e^{-1}$，此时 k=−*e* 不符合题意，当 k<−*e* 时，两图像只有两个公共点，不合题意，而当−*e*<k<−1 时，两图像有 4 个公共点，符合题意，所以实数 k 的取值范围是$\left\{\frac{1}{e^3}\right\}\cup(-e,\ -1)$.



题型七 数列中分段函数奇偶性讨论问题

数列中分段函数奇偶性四指对 n 为奇函数和偶函数两种情况进行讨论。

例 13、(2016 扬州期末） 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=a(0<a\leqslant 2)$，$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2, & a_n>2, \\ -a_n+3, & a_n\leqslant 2 \end{cases}$ $(n\in \mathbf{N}^*)$，记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，若 $S_n=2015$，则 $n=$________.

【答案】1 343

【解析】**思路分析** 因为 $a_1=a\in(0,2]$，所以 $a_2=3-a\in[1,3)$，为此，需要按 $a\in(0,1]$、$a\in(1,2]$进行分类，从而确定后面的项，进而求出它的和，并根据它的和，求出 n 的值.

(1)当 $a\in(0,1]$时，则数列$\{a_n\}$为 $a,3-a,1-a,2+a$，$a,3-a,1-a,2+a$，…，构成一个以 4 为周期的周期数列，故 $S_{4k}=6k=2\,015$，此时 $k=\frac{2\,015}{6}\notin\mathbf{N}^*$，不成立；$S_{4k-1}=6k-2-a=2\,015$，此时 $k=\frac{2\,017+a}{6}=336+\frac{1+a}{6}$，不可能是正整数，也不成立；$S_{4k-2}=6k-3=2\,015$，此时 $k=\frac{2\,018}{6}\notin\mathbf{N}^*$，不成立；$S_{4k-3}=6k-6+a=2\,015$，此时 $k=\frac{2\,021-a}{6}=336+\frac{5-a}{6}$，不可能是正整数，也不成立.

(2) 当 $a\in(1,2]$时，则数列$\{a_n\}$为 $a,3-a$，$a,3-a$，…，构成一个以 2 为周期的周期数列，故 $S_{2k}=3k=2\,015$，此时 $k=\frac{2\,015}{3}\notin\mathbf{N}^*$，不成立，$S_{2k-1}=3k-(3-a)=2\,015$，解得 $k=\frac{2018-a}{3}=672+\frac{2-a}{3}$，故当 $a=2$ 时，$k=672$，故 $n=2k-1=1\,343$.

二、达标训练

1、(2019 苏州期初调查）已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x, & x\geqslant 0, \\ -x^2+ax, & x<0, \end{cases}$ 为奇函数，则实数 a 的值等于________.

【答案】. -2

【解析】**解法 1(特殊值法)** $f(-1)=-1-a$，$f(1)=-1$，因为 $f(x)$为奇函数，所以$-1-a=1$，则 $a=-2$.

解法 2(定义法) 设 $x<0$，则$-x>0$，所以 $f(-x)=x^2+2x=-f(x)$，即 $x^2+2x=x^2-ax$ 对 $x<0$ 恒成立，所以 $a=-2$.

2、(2016 南京、盐城、连云港、徐州二模） 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+1, & x\leqslant 0, \\ -(x-1)^2, & x>0, \end{cases}$ 则不等式 $f(x)\geqslant -1$ 的解集是________.

【答案】 $[-4,2]$

【解析】 当 $x\leqslant 0$ 时，不等式 $f(x)\geqslant -1$ 可以化为$\frac{1}{2}x+1\geqslant -1$，解之得 $x\geqslant -4$，此时$-4\leqslant x\leqslant 0$；当 $x>0$ 时，不等式 $f(x)\geqslant -1$ 可以化为$-(x-1)^2\geqslant -1$，解之得 $0<x\leqslant 2$，综上所述，不等式 $f(x)\geqslant -1$ 的解集为$[-4,2]$．

3、(2016 苏州暑假测试）已知实数 $m\neq0$，函数 $f(x)=\begin{cases}3x-m, & x\leqslant2,\\ -x-2m, & x>2,\end{cases}$ 若 $f(2-m)=f(2+m)$，则 m 的值为________.

【答案】 8 或 $-\frac{8}{3}$

【解析】当 $m>0$ 时，$2-m<2,2+m>2$，所以 $3(2-m)-m=-(2+m)-2m$，所以 $m=8$；当 $m<0$ 时，$2-m>2,2+m<2$，所以 $3(2+m)-m=-(2-m)-2m$，所以 $m=-\frac{8}{3}$.

4、(2018 苏锡常镇调研）已知函数 $f(x)=\begin{cases}a-e^x, & x<1,\\ x+\frac{4}{x}, & x\geqslant1\end{cases}$ (e 是自然对数的底)．若函数 y＝f(x)的最小值是 4，则实数 a 的取值范围为________.

【答案】. $[e+4,\ +\infty)$

【解析】**解法 1** 在 $x\geqslant1$ 时，$f(x)_{min}=f(2)=4$.所以当 $x<1$ 时，$a-e^x\geqslant4$ 恒成立．转化为 $a\geqslant e^x+4$ 对 $x<1$ 恒成立．因为 e^x+4 在$(-\infty,\ 1)$上的值域为$(4,\ e+4)$，所以 $a\geqslant e+4$.

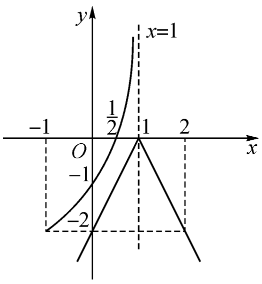
解法 2 当 $x<1$ 时，$f(x)=a-e^x>a-e$，当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=x+\frac{4}{x}\geqslant4$，当且仅当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时，取“＝”，故函数 f(x)的值域是$[e+4,\ +\infty)$.

解后反思 解法 1 中，因为 e^x+4 在 $x<1$ 上没有最大值，所以要特别注意边界值 $e+4$ 能否取到.

5、(2018 扬州期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(-x+1)-1, & x\in[-1,\ k],\\ -2|x-1|, & x\in(k,\ a],\end{cases}$ 若存在实数 k 使得该函数的值域为$[-2,\ 0]$，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】 $\left(\frac{1}{2},\ 2\right]$

【解析】根据函数 f(x)的解析式作出草图如图，①当 $x\in[-1,\ k]$时，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x+1)-1$，它在$[-1,\ 1)$上是单调递增的，且 $f(-1)=-2$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，因为该函数在$[-1,a]$上的值域为$[-2,0]$，所以必须有 $-1<k\leqslant\frac{1}{2}$；②当 $x\in(k,\ a]$时，$f(x)=-2|x-1|$，在$(-\infty,\ 1]$上单调递增，在$[1,\ +\infty)$上单调递减，且 $f(0)=f(2)=-2$，$f(1)=0$，因为函数的值域为$[-2,\ 0]$，所以必须有 $0\leqslant k<a\leqslant2$.综合①②，要求存在实数 k 使得该函数的值域为$[-2,\ 0]$，则必须 $0\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}<a\leqslant2$.所以实数 a 的取值范围为$\left(\frac{1}{2},\ 2\right]$.



6、(2017 南通、扬州、淮安、宿迁、泰州、徐州六市二调） 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x+m, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$其中 $m>0$，若函数 $y=f(f(x))-1$ 有 3 个不同的零点，则实数 m 的取值范围是________.

【答案】 (0,1)

【解析】思路分析 先画出函数图像草图，再分类讨论.

令 $f(f(x))=1$，得 $f(x)=\sqrt{2}$或 $f(x)=m-1<0$，进一步，得 $x=\sqrt{\sqrt{2}+1}$或 $x=m-\sqrt{2}<0$ 或 $x=\sqrt{m}$.因为已知 $m>0$，所以只要 $m<1$，即 $0<m<1$.

7、(2017 南通一调） 已知函数 $f(x)=|x|+|x-4|$，则不等式 $f(x^2+2)>f(x)$的解集用区间表示为________.

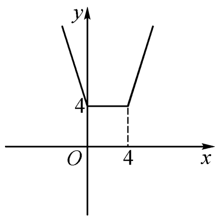
【答案】 $(-\infty，-2)\cup(\sqrt{2}，+\infty)$

【解析】思路分析 作出函数 $f(x)=|x|+|x-4|$的图像，通过函数的图像并结合单调性，得出关于 x 的不等式组，解得 x 的取值范围.

函数 $f(x)$的图像如图，知图像关于直线 $x=2$ 对称.

因为 $x^2+2>0$ 且 $f(x^2+2)>f(x)$，则必有

$\begin{cases}x^2+2>4,\\ x^2+2>x,\\ 4<(x^2+2)+x,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x^2>2,\\ x^2-x+2>0,\\ x^2+x-2>0,\end{cases}$ 解得 $x\in(-\infty，-2)\cup(\sqrt{2}，+\infty)$.



解后反思 本题主要考查分段函数的图像和性质、一元二次不等式等基础知识，考查数形结合、分类讨论等思想及运算求解能力.

8、(2017 常州期末）若函数 $f(x)=\left|\frac{e^x}{2}-\frac{a}{e^x}\right|(a\in\mathbf{R})$在区间[1,2]上单调递增，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】 $\left[-\frac{e^2}{2}，\frac{e^2}{2}\right]$

【解析】思路分析 本题所给函数含有绝对值符号，可以转化为 $g(x)=\frac{e^x}{2}-\frac{a}{e^x}$的值域和单调性来研究，根据图

像的对称性可得 $g(x)=\frac{e^x}{2}-\frac{a}{e^x}$只有单调递增和单调递减这两种情况.

设 $g(x)=\frac{e^x}{2}-\frac{a}{e^x}$，因为 $f(x)=|g(x)|$在区间[1,2]上单调递增，所以 $g(x)$有两种情况：

①$g(x)\leqslant 0$ 且 $g(x)$在区间[1,2]上单调递减.

又 $g'(x)=\frac{(e^x)^2+2a}{2e^x}$，所以 $g'(x)=\frac{(e^x)^2+2a}{2e^x}\leqslant 0$ 在区间[1,2]上恒成立，且 $g(1)\leqslant 0$.

所以$\begin{cases}2a\leqslant -(e^x)^2,\\ \frac{e}{2}-\frac{a}{e}\leqslant 0,\end{cases}$ 无解.

②$g(x)\geqslant 0$ 且 $g(x)$在区间[1,2]上单调递增，即 $g'(x)=\frac{(e^x)^2+2a}{2e^x}\geqslant 0$ 在区间[1,2]上恒成立，且 $g(1)\geqslant 0$，

所以$\begin{cases}2a\geqslant -(e^x)^2,\\ \frac{e}{2}-\frac{a}{e}\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\in\left[-\frac{e^2}{2},\ \frac{e^2}{2}\right]$.

综上，实数 a 的取值范围为$\left[-\frac{e^2}{2},\ \frac{e^2}{2}\right]$.

9、(2017 南通、扬州、泰州、淮安三调）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant a,\\ x^3-3x, & x<a.\end{cases}$ 若函数 $g(x)=2f(x)-ax$ 恰有 2 个不同的零点，则实数 a 的取值范围是____.

【答案】、$(-\frac{3}{2},\ 2)$

【思路分析】遇到函数零点个数问题，通常转化为两个函数图象交点问题，进而借助数形结合思想解决问题；也可转化为方程解的个数问题，通过具体的解方程达到解决问题的目的.前者由于是通过图形解决问题，故对绘制的函数图象准确度和细节处要求较高，后者对问题转化的等价性和逻辑推理的严谨性要求较高.下面的解法是从解方程的角度考虑的.

解析：函数 $g(x)=2f(x)-ax$ 恰有 2 个不同的零点，即方程 $2f(x)-ax=0$ 恰有 2 个不相等的根，亦即方程（Ⅰ）$\begin{cases}x\geq a\\ 2x-ax=0\end{cases}$ 和（Ⅱ）$\begin{cases}x<a\\ 2x^3-6x-ax=0\end{cases}$ 共有 2 个不相等的根.

首先（Ⅰ）中 $2x-ax=0$，即 $(2-a)x=0$，若 $a=2$，则 $x\geq 2$ 都是方程 $2x-ax=0$ 的根，不符合题意，所以 $a\neq 2$，因此（Ⅰ）中由 $2x-ax=0$ 解得 $x=0$，下面分情况讨论

（1）若 $x=0$ 是方程（Ⅰ）的唯一根，则必须满足 $0\geq a$，即 $a\leq 0$，此时方程（Ⅱ）必须再有唯一的一个根，即$\begin{cases}x<a\leq 0\\ 2x^3-6x-ax=0\end{cases}$ 有唯一一根，因为 $x\neq 0$，由 $2x^3-6x-ax=0$，得 $2x^2=6+a$ 必须有满足 $x<a\leq 0$

的唯一根，首先$6+a>0$，其次解得的负根需满足$-\sqrt{\frac{6+a}{2}}<a\le 0$，从而解得$-\frac{3}{2}<a\le 0$，

（2）若$x=0$不是方程（Ⅰ）的唯一根，则必须满足$0<a$，即$a>0$，此时方程（Ⅱ）必须有两个不相等的根，即$\begin{cases} a>0 \\ x<a \\ 2x^3-6x-ax=0 \end{cases}$有两个不相等的根，由$2x^3-6x-ax=0$，得$x=0<a$适合，另外$2x^2=6+a$还有必须一满足$x<a,a>0$的非零实根，首先$6+a>0$，解得的正根需满足$\sqrt{\frac{6+a}{2}}\ge a$，从而解得$0<a\le 2$，但前面已经指出$a\ne 2$，故$0<a<2$，

综合（1）、（2），得实数a的取值范围为$(-\frac{3}{2},2)$．