基于“稚化思维”理念下的数学“微专题”设计
——以“多元最值问题”为例

◉浙江省象山县第二中学 吕增锋

“微专题”是指一个相关联的、可以单独研究的知识体系、某种数学思想方法、一个研究主题等.利用“微专题”进行教学具有“因微而准、因微而细、因微而深”等特点,能起到“见微知著”,促进学生深度学习的目的.“微专题”要针对学生存在的“实问题”、“真问题”进行设计,但在实际教学中,教师往往很难准确把握学生的学情,因此,微专题与学生的实际需求存在着“脱节”的现象.那么如何解决这个问题呢?笔者认为应该立足“稚化思维”进行微专题的设计.所谓稚化思维,就是教师把自己的外在权威隐蔽起来,在教学时不以一个知识丰富的教师自居,而是把自己的思维降格到学生的思维水平上,亲近学生,接近学生,有意识地退回到与学生相仿的思维状态,设身处地地揣摩学生的学习水平、状态等,有意识地发生一种陌生感、新鲜感,以与学生同样的认知兴趣、同样的学习情绪、同样的思维情境、共同的探究行为来完成教学的和谐共创.简而言之,“稚化思维”就是“惑学生所惑、错学生所错、难学生所难”.那么具体应该如何操作呢?下面笔者就结合“多元最值问题”微专题的设计,谈谈对此的做法.

一、以学生的实际需求为起点确定主题

学习过程是一个识知生成的过程,“学”蕴涵着“知”的发生与发展,明确“知什么”有助促进“学”的发生.学生是教学的主体,是课堂上直接的对话者.从表面上看,教师是“教育者”,学生是“被教育者”,但事实上,教学中的思维、决策和行为都是立足于学生的需求而展开的.毋庸置疑,学生才是教师学习与成长中真正的教育者.因此,将微专题的主题定位于“回应学习者需求”才能使微专题发挥应有的功效.微专题的选题一般可以围绕考点细化、知识点延伸、易错点辨析、难点突破、思维角度转化等视角进行,如图1所示,但具体采用哪个视角,就需要明确学生的实际需求.

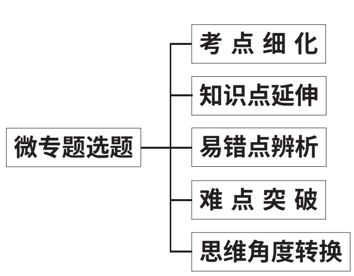

图1

多元最值问题是高中数学学习的重点、难点,也是高考考查的热点.多元最值问题中以二元问题最为常见,也相对简单.对于超过二元的问题,要善于将其转化成二元问题或一元问题.在设计本微专题之前,笔者先对学生存在的问题进行了调查,结果统计如下:

存在问题	所占比例
化简变形能力弱	80.5%
缺乏消元意识	65.7%
函数方程思想薄弱	55.3%
数形结合能力薄弱	47.1%
无法读懂题意	15.5%

根据统计结果,本专题设计的原则是“立足难点易错点,展现数学思想方法”.基于上述分析,笔者设计了以下微专题.

例1 已知实数x,y满足$x>y>0$,且$x+y\leqslant 2$,则$\frac{2}{x+3y}+\frac{1}{x-y}$的最小值为______.

例2 $x,y,z\in\mathbf{R}^*$,$x-2y+3z=0$,$\frac{y^2}{xz}$的最小值为______

练习1 设x,y为实数,若$4x^2+y^2+xy=1$,则$2x+y$的最大值是______.

意图:体会基本不等式在解决此类问题中的重要作用,掌握基本的变形方法与激情.

例3 已知任意非零实数x,y满足$3x^2+4xy\leqslant\lambda(x^2+y^2)$恒成立,则实数$\lambda$的最小值为______.

例4 设实数a,b,c满足$a^2+b^2\leqslant c\leqslant 1$,则$a+b+c$的最小值为______.

练习2 已知$x+y=1$,$y>0$,$x>0$,则$\frac{1}{2x}+\frac{x}{y+1}$的最小值为______.

意图:消元是化归与转化的方法.针对多元最值问题,可以先消元转化为一元问题,再利用函数知识求解.

例5 已知$x,y\in\mathbf{R}$,则$(x+y)^2+\left(x-\frac{1}{y}-1\right)^2$的最小值为______.

意图:数形结合是高中数学又一基本思想,看似一

些复杂的代数问题，通过构造几何模型，以形助数，有柳暗花明又一村的效果.

二、以学生的认知结构为起点分析问题

分析问题要以学生已有的认知结构为基础，促进学生从原有知识和经验中构建知识的生长点，通过构建认知“脚手架”，实现从旧知识到新知识层次的自然过渡.因此，教学设计时教师要尽量避免从数学教材或假想的问题和经验出发，而是要立足学生真实的问题和经验. 所谓真实的问题就是学生头脑中真正存在的问题，它是新知识的固着点.因此，把握学生固有认识与新现象、新事实的矛盾是分析问题的关键，通过引导学生主动发现这一矛盾，从而引发有效的数学学习活动，实现让学生学有所思、学有所“成”.

对于例1我们可以多角度进行问题分析.

视角1：二元函数的最值问题，通常有两个途径，一是通过消元，转化为一元函数，再用单调性或基本不等式求解，二是直接用基本不等式，因已知条件中既有和的形式，又有积的形式，不能一步到位求出最值，考虑用基本不等式放缩后，再通过不等式的途径进行.

方法1：因为$4\geqslant 2x+2y$，$x>y>0$，所以

$$4\left(\frac{2}{x+3y}+\frac{1}{x-y}\right)\geqslant\left(\frac{2}{x+3y}+\frac{1}{x-y}\right)[(x+3y)+(x-y)]$$

$$=3+\frac{2(x-y)}{x+3y}+\frac{x+3y}{x-y}$$

$$\geqslant 3+2\sqrt{2},$$

当且仅当$x=2\sqrt{2}-1$，$y=3-2\sqrt{2}$时，取等号.

故$\frac{2}{x+3y}+\frac{1}{x-y}$的最小值$\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$.

方法2：因为$x>y>0$，$x+y\leqslant 2$，所以$0<y<1$.

又因为$\frac{2}{x+3y}+\frac{1}{x-y}\geqslant\frac{2}{2+2y}+\frac{1}{2-2y}=\frac{3-y}{2(1+y)(1-y)}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6-\left(3-y+\frac{8}{3-y}\right)}\geqslant\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$，当且仅当$x=2\sqrt{2}-1$，$y=3-2\sqrt{2}$时，取等号.

视角2：元函数的最值转化为一元函数的最值，从而利用导数研究函数最值，但在处理过程中充分考虑变量的取值范围，否则容易出错.

方法3：因为$2\geqslant x+y$，$x>y>0$，

所以$\frac{2}{x+3y}+\frac{1}{x-y}\geqslant\frac{x+y}{x+3y}+\frac{x+y}{2x-2y}=\frac{1+k}{1+3k}+\frac{1+k}{2-2k}$，其中$k=\frac{y}{x}$.

记$g(k)=\frac{1+k}{1+3k}+\frac{1+k}{2-2k}$，$k\in(0,1)$.

因为$g'(k)=\frac{28k^2+40k-4}{(2+4k-6k^2)^2}$，令$g'(k)=0$，得$k=\frac{4\sqrt{2}-5}{7}$.

由于$g(k)$在$\left(0,\frac{4\sqrt{2}-5}{7}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{4\sqrt{2}-5}{7},1\right)$上单调递增.

故$g(k)_{\min}=g\left(\frac{4\sqrt{2}-5}{7}\right)=\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$，

所以$\frac{2}{x+3y}+\frac{1}{x-y}$的最小值$\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$.

三、以学生的思维方式为起点提炼方法

学生的思维方式是教学设计的重要依据.教师能否准确把握学生的思维心理和思维特点，能否对学生接受知识的心理作出切合实际的判断，是教师提炼解题方法的关键. 为了使教师的思维契合或顺应学生的思维，让两种思维“合拍”，教师需要设身处地地从学生实际的思维方式出发来进行方法提炼，当教师的思维带上了学生的色彩，甚至达到了“学生化”之后，方法提炼的过程就自然与学的过程融为一体，为专题设计就会进入一种自然流畅的状态.

对于“多元最值问题”的解题方法的提炼，可以从“宏观方法”与“微观操作”两大视角进行提炼，具体如图2所示.

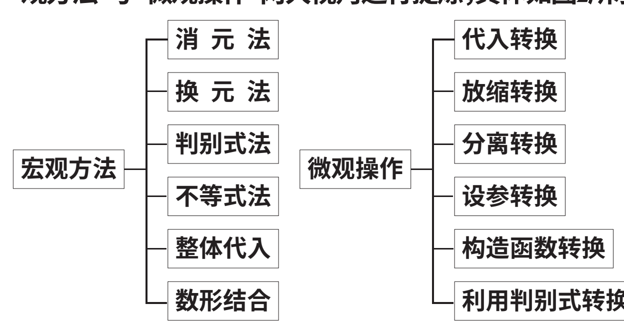

图2

那么，那种视角更加符合学生的思维呢？“宏观方法”视角所提炼的方法并不是相互独立的，而是有“重叠”的，比如，在利用“不等式法”时经常要用到“消元法”、“换元法”、“整体代入法”等，因此，这样的提炼方式缺乏针对性，容易使学生混淆.“微观操作”视角就比较符合学生思维，方法的目的性明确，就是为“转换”，通过“代入”、“放缩”、“设参”等手段把不熟悉的问题转化为易于学生理解的问题.

微专题在知识的整合和优化上有得天独厚的优势，题在教学过程中有效地避免了题海训练，注重了数学思想的学习感悟，弥补了传统教学的不足，发挥了学生主体作用.微专题设计的核心是理解学生，而基于“稚化思维”的微专题设计的实质是教师把思维的触角深入到学生思维的领地，进行发掘、研究和探索，然后跳出学生的思维框架，通过有选择的模拟，想学生之所想，从而使微专题更加贴近学生实际. H