专题突破一　充分、必要条件的判断

一、应用定义

例 1　(2018 浙江)已知平面 α，直线 m，n 满足 $m\not\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，则“$m\parallel n$”是“$m\parallel\alpha$”的(　　)

A.充分不必要条件　　　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　　　D.既不充分又不必要条件

考点　充分、必要条件的判断

题点　充分不必要条件的判断

答案　A

解析　∵若 $m\not\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，且 $m\parallel n$，则一定有 $m\parallel\alpha$，

但若 $m\not\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，且 $m\parallel\alpha$，则 m 与 n 有可能异面，

∴“$m\parallel n$”是“$m\parallel\alpha$”的充分不必要条件.

故选 A.

点评　利用定义法判断充分、必要条件应按如下步骤进行：①分清条件与结论，即分清哪一个是条件，哪一个是结论；②判断推式的真假，即判断 $p\Rightarrow q$ 及 $q\Rightarrow p$ 的真假；③下结论，即根据推式及定义下结论.

跟踪训练 1　如果命题“若 A，则 B”是假命题，命题“若 B，则 A”是真命题，则 A 是 B 的________条件.(填“充分”或“必要”)

答案　必要

解析　由题意得 $A\not\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，所以 A 是 B 的必要条件.

二、利用传递性

例 2　如果 A 是 B 的必要不充分条件，B 是 C 的充要条件，D 是 C 的充分不必要条件，那么 A 是 D 的______条件.(填“充分不必要”“必要不充分”“充要”“既不充分又不必要”)

考点　充分、必要条件的判断

题点　必要不充分条件的判断

答案　必要不充分

解析　依题意，有 $A\Leftarrow B\Leftrightarrow C\Leftarrow D$ 且 $AD\not\Rightarrow B\Leftrightarrow C\not\Rightarrow D$，

由命题的传递性可知 $D\Rightarrow A$，但 $A\not\Rightarrow D$.于是 A 是 D 的必要不充分条件.

点评　充分、必要条件在推导的过程当中具有传递性，即若 $p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow r$，则 $p\Rightarrow r$.

跟踪训练 2　若 M 是 N 的充分不必要条件，N 是 P 的充要条件，Q 是 P 的必要不充分条件，则 M 是 Q 的____________条件.(填“充分不必要”“必要不充分”“充要”“既不充分又不必要”)

考点　充分、必要条件的判断

题点　充分不必要条件的判断

答案　充分不必要

解析　命题的充分必要性具有传递性，

由题意知 $M \Rightarrow N \Leftrightarrow P \Rightarrow Q$，但 $M \nLeftarrow N \Leftrightarrow P \nLeftarrow Q$，即 $M \Rightarrow Q$，$Q \nRightarrow M$，故 M 是 Q 的充分不必要条件.

三、利用集合

例 3　设命题 p：$x(x-3)<0$，命题 q：$2x-3<m$，已知 p 是 q 的充分不必要条件，则实数 m 的取值范围为________.

考点　充分、必要条件的综合应用

题点　由充分、必要条件求参数的范围

答案　$[3，+\infty)$

解析　设 p，q 分别对应集合 P，Q，

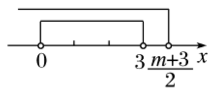
则 $P=\{x|x(x-3)<0\}$

$=\{x|0<x<3\}$；

$Q=\{x|2x-3<m\}=\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{m+3}{2}\right\}$.

由题意知 $p \Rightarrow q$，$q \nRightarrow p$，故 P　Q，

则在数轴上表示不等式如图所示，



则 $\dfrac{m+3}{2} \geqslant 3$，解得 $m \geqslant 3$，

即实数 m 的取值范围为 $[3，+\infty)$.

点评　当所要判断的命题与方程的根、不等式的解集以及集合有关或所描述的对象可以用集合表示时，我们可以借助集合间的基本关系进行充要条件的判断，即写出集合 $A=\{x|p(x)\}$ 及 $B=\{x|q(x)\}$，利用集合间的包含关系加以判断，具体情况如下：

①若 $A \subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件；②若 $A \supseteq B$，则 p 是 q 的必要条件；③若 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件；④若 A　B，则 p 是 q 的充分不必要条件；⑤若 B　A，则 p 是 q 的必要不充分条件.

跟踪训练 3　若“$x^2-2x-8>0$”是“$x<m$”的必要不充分条件，则 m 的最大值为________.

答案　-2

解析　设 $A=\{x|x^2-2x-8>0\}=\{x|x<-2$ 或 $x>4\}$，

$B=\{x|x<m\}$，由题意知，B　A，

$\therefore m \leqslant -2$，故 m 的最大值为 -2.

达标检测

1.若 a，b，c 是实数，则“$ac<0$”是“不等式 $ax^2+bx+c>0$ 有解”的(　　)

A.充要条件　　　　B.充分不必要条件

C.必要不充分条件　　　　D.既不充分又不必要条件

考点　充分、必要条件的判断

题点　充分不必要条件的判断

答案　B

解析　由 $ac<0$，得 $a\neq0$ 且方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$，

则方程 $ax^2+bx+c=0$ 一定有实数解，

此时不等式 $ax^2+bx+c>0$ 有解；

反过来，由不等式 $ax^2+bx+c>0$ 有解不能得出 $ac<0$，

例如，当 $a=b=c=1$ 时，不等式 $ax^2+bx+c>0$，

即 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ 有解，

此时 $ac=1>0$.故选 B.

2.“$a+b=3$”是“$a=1$ 且 $b=2$”的(　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分又不必要条件

考点　充分、必要条件的判断

题点　必要不充分条件的判断

答案　B

解析　“若 $a+b=3$，则 $a=1$ 且 $b=2$”是假命题，“若 $a=1$ 且 $b=2$，则 $a+b=3$”是真命题，故“若 $a+b=3$，则“$a=1$ 且 $b=2$”的必要不充分条件.

3.设甲、乙、丙是三个条件，如果甲是乙的必要条件，丙是乙的充分条件，但不是乙的必要条件，那么(　　)

A.丙是甲的充分条件，但不是甲的必要条件

B.丙是甲的必要条件，但不是甲的充分条件

C.丙是甲的充要条件

D.丙既不是甲的充分条件，也不是甲的必要条件

考点　充分、必要条件的判断

题点　充分不必要条件的判断

答案　A

解析　由题意知，甲⇐乙⇐丙且乙⇏丙，

∴甲⇐丙且甲⇏丙，

∴丙是甲的充分条件，但不是甲的必要条件.

4.下列命题中是假命题的是________.(填序号)

①“$A\cap B\neq\varnothing$”是“A　B”的充分条件；

②“$b^2-4ac<0$”是“$ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$”的充要条件；

③“$\sin\alpha>\sin\beta$”是“$\alpha>\beta$”的充分不必要条件；

④“$M>N$”是“$\log_2M>\log_2N$”的充要条件.

考点　充分、必要条件的判断

题点　充分、必要条件的判断

答案　①②③④

解析　当 $A=\{1,3\}$，$B=\{1,2\}$时，$A\cap B=\{1\}\neq\varnothing$，但 $A\not\subseteq B$，故①为假命题；

$ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$ 等价于$\begin{cases}a<0,\\ \Delta=b^2-4ac<0\end{cases}$或 $a=b=0$，$c<0$，故②为假命题；

当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{5\pi}{6}$时，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{2}=\sin\beta$，但 $\alpha<\beta$，故③为假命题；

当 $0>M>N$ 时，$\log_2M$，$\log_2N$ 无意义，故④为假命题.

5.已知条件 p：$A=\{x|x^2-(a+1)x+a\leqslant 0\}$，条件 q：$B=\{x|x^2-3x+2\leqslant 0\}$，当 a 为何值时：

(1)p 是 q 的充分不必要条件；

(2)p 是 q 的必要不充分条件；

(3)p 是 q 的充要条件.

考点　充分、必要条件的综合应用

题点　由充分、必要条件求参数的范围

解　由题意知，p：$A=\{x|(x-1)(x-a)\leqslant 0\}$，$q$：$B=[1,2]$.

(1)因为 p 是 q 的充分不必要条件，

所以 A　B，故 $1\leqslant a<2$.

(2)因为 p 是 q 的必要不充分条件，所以 B　A，故 $A=[1，a]$且 $a>2\Rightarrow a>2$.

(3)因为 p 是 q 的充要条件，所以 $A=B\Rightarrow a=2$.

针对训练

一、选择题

1.王昌龄的《从军行》中两句诗为“黄沙百战穿金甲，不破楼兰终不还”，其中后一句中“攻破楼兰”是“返回家乡”的(　　)

A.充分条件　　B.必要条件

C.充要条件　　D.既不充分又不必要条件

答案　B

解析　“攻破楼兰”是“返回家乡”的必要条件.故选 B.

2.“$\alpha>\frac{\pi}{3}$”是“$\sin\alpha>\frac{\sqrt{3}}{2}$”的(　　)

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分又不必要条件

答案　D

解析　易知“$\alpha>\frac{\pi}{3}$”不一定得到“$\sin\alpha>\frac{\sqrt{3}}{2}$”，比如 $\alpha=\pi>\frac{\pi}{3}$，但 $\sin\alpha=0<\frac{\sqrt{3}}{2}$；反之亦然，如 $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=1>\frac{\sqrt{3}}{2}$，但 $-\frac{3\pi}{2}<\frac{\pi}{3}$.所以“$\alpha>\frac{\pi}{3}$”是“$\sin\ \alpha>\frac{\sqrt{3}}{2}$”的既不充分又不必要条件，故选 D.

3.若 $a\in\mathbf{R}$，则“$|a-2|\geqslant1$”是“$a\leqslant0$”的(　　)

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分又不必要条件

答案　B

解析　记不等式$|a-2|\geqslant1$ 的解集为 A，则 $A=\{a|a\leqslant1$ 或 $a\geqslant3\}$，记 $B=\{a|a\leqslant0\}$，则 $B\subseteq A$，即“$a\leqslant0$”能推出“$|a-2|\geqslant1$”，反之不能，所以“$|a-2|\geqslant1$”是“$a\leqslant0$”的必要不充分条件.故选 B.

4.已知 x，y 是非零实数，则“$x>y$”是“$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$”的(　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分又不必要条件

答案　D

解析　当 $x>0>y$ 时，满足 $x>y$，但此时$\frac{1}{x}>0>\frac{1}{y}$，充分性不成立；当 $x<0<y$ 时，满足$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$，但此时 $x>y$ 不成立，必要性不成立，所以“$x>y$”是“$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$”的既不充分又不必要条件，故选 D.

5.不等式 $x(x-2)<0$ 成立的一个必要不充分条件是(　　)

A.$x\in(0,2)$　　B.$x\in(0,1)$

C.$x\in[-1，+\infty)$　　D.$x\in(1,3)$

考点　充分、必要条件的判断

题点 必要不充分条件的判断

答案 C

解析 由 $x(x-2)<0$，得 $0<x<2$，

因为$(0,2)\quad[-1，+\infty)$，

所以“$x\in[-1，+\infty)$”是“不等式 $x(x-2)<0$ 成立”的一个必要不充分条件.

6.设函数 $f(x)=|\log_2 x|$，则 $f(x)$在区间$(m,2m+1)(m>0)$内不是单调函数的充要条件是(　　)

A.$0<m<\dfrac{1}{2}$　　　　B.$0<m<1$

C.$\dfrac{1}{2}<m<1$　　　　D.$m>1$

答案 B

解析 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x，x\geqslant 1，\\ -\log_2 x，0<x<1.\end{cases}$

$f(x)$的图象在$(0,1)$内单调递减，

在$(1，+\infty)$内单调递增.

若 $f(x)$在$(m,2m+1)(m>0)$上不是单调函数，

则$\begin{cases}m<1，\\ 2m+1>1\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<1$.

7.设 a，b 都是不等于 1 的正数，则“$3^a>3^b>3$”是“$\log_a 3<\log_b 3$”的(　　)

A.充要条件　　　　B.充分不必要条件

C.必要不充分条件　　　　D.既不充分又不必要条件

答案 B

解析 $\because 3^a>3^b>3$，$\therefore a>b>1$，此时 $\log_a 3<\log_b 3$ 正确；反之，若 $\log_a 3<\log_b 3$，则不一定得到 $3^a>3^b>3$，例如当 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{3}$时，$\log_a 3<\log_b 3$ 成立，但推不出 $a>b>1$.故“$3^a>3^b>3$”是“$\log_a 3<\log_b 3$”的充分不必要条件.

二、填空题

8.下列不等式：

①$x<1$；②$0<x<1$；③$-1<x<0$；④$-1<x<1$.

其中，可以作为“$x^2<1$”的一个充分条件的所有序号为________.

答案 ②③④

解析 由于 $x^2<1$，即$-1<x<1$，①显然不能使$-1<x<1$ 一定成立，②③④满足题意.

9.若条件 p：$|x|\leqslant 2$，条件 q：$x\leqslant a$，且 p 是 q 的充分不必要条件，则 a 的取值范围是_________.

考点 充分、必要条件的综合应用

题点 由充分、必要条件求参数的范围

答案　$[2，+\infty)$

解析　p：$|x|\leqslant 2$ 等价于 $-2\leqslant x\leqslant 2$.

因为 p 是 q 的充分不必要条件，

所以有$[-2,2]$　$(-\infty，a]$，即 $a\geqslant 2$.

10.若集合 $A=\{1，m^2\}$，$B=\{2,4\}$，则“$m=2$”是“$A\cap B=\{4\}$”的________________条件.

答案　充分不必要

解析　$m=2\Rightarrow A=\{1,4\}\Rightarrow A\cap B=\{4\}$.

又 $A\cap B=\{4\}\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=-2$ 或 $m=2\not\Rightarrow m=2$.

11.给出如下三个命题：

①“$2^a>2^b$”是“$ma>mb$”的充要条件；

②“$x>0$”是“$x>5$”的必要不充分条件；

③在△ABC 中，“$A>60°$”是“$\sin A>\frac{\sqrt{3}}{2}$”的充要条件.

其中不正确的命题是________.(填序号)

考点　对充分条件与必要条件的理解及判断

题点　充分条件与必要条件

答案　①③

解析　若 $2^a>2^b$，则 $a>b$，而此时 $ma>mb$ 不一定成立；

若 $ma>mb$，当 $m>0$ 时，则 $a>b$，此时 $2^a>2^b$；

当 $m<0$ 时，此时 $a<b$，此时 $2^a<2^b$，

所以“$2^a>2^b$”是“$ma>mb$”的既不充分又不必要条件，

命题①错误；

由“$x>0$”$\not\Rightarrow$“$x>5$”及“$x>5$”$\Rightarrow$“$x>0$”知

命题②正确；

在△ABC 中，$A=150°$时，$\sin A<\frac{\sqrt{3}}{2}$，故命题③错误.

三、解答题

12.(1)是否存在实数 m，使得 $2x+m<0$ 是 $x^2-2x-3>0$ 的充分条件？

(2)是否存在实数 m，使得 $2x+m<0$ 是 $x^2-2x-3>0$ 的必要条件？

考点　充分、必要条件的综合应用

题点　由充分、必要条件求参数的范围

解　(1)欲使 $2x+m<0$ 是 $x^2-2x-3>0$ 的充分条件，

则只需$\left\{x\middle|x<-\frac{m}{2}\right\}\subseteq\{x|x<-1$ 或 $x>3\}$，

则只需$-\frac{m}{2}\leqslant -1$，即 $m\geqslant 2$，

故存在实数 $m\geqslant 2$，使 $2x+m<0$ 是 $x^2-2x-3>0$ 的充分条件.

(2)欲使 $2x+m<0$ 是 $x^2-2x-3>0$ 的必要条件，

则只需$\left\{x\middle|x<-\frac{m}{2}\right\}\supseteq\{x|x<-1$ 或 $x>3\}$，

这是不可能的，

故不存在实数 m，使 $2x+m<0$ 是 $x^2-2x-3>0$ 的必要条件.

13.求证：函数 $f(x)=x^2+|x+a|+1$ 是偶函数的充要条件是 $a=0$.

证明　先证充分性，若 $a=0$，则函数 $f(x)=x^2+|x+a|+1$ 是偶函数.

因为 $a=0$，所以 $f(x)=x^2+|x|+1(x\in\mathbf{R})$.

因为 $f(-x)=(-x)^2+|-x|+1=x^2+|x|+1$，

所以 $f(x)$是偶函数.

再证必要性，若 $f(x)=x^2+|x+a|+1$ 是偶函数，则 $a=0$.

因为 $f(x)$是偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，

即$(-x)^2+|-x+a|+1=x^2+|x+a|+1$，

从而$|x-a|=|x+a|$，即$(x-a)^2=(x+a)^2$，

展开并整理，得 $ax=0$.因为 $x\in\mathbf{R}$，所以 $a=0$.

▶探究与拓展

14.设 $n\in\mathbf{N}^*$，一元二次方程 $x^2-4x+n=0$ 有整数根的充要条件是 $n=$________.

答案　3 或 4

解析　由 $\Delta=16-4n\geqslant 0$，得 $n\leqslant 4$，

又 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $n=1,2,3,4$.

当 $n=1,2$ 时，方程没有整数根；

当 $n=3$ 时，方程有整数根 1,3，

当 $n=4$ 时，方程有整数根 2.综上可知，$n=3$ 或 4.

15.设 a，b，c 是△ABC 的三个内角 A，B，C 所对的边.求证：$a^2=b(b+c)$的充要条件是 $A=2B$.

证明　充分性：∵$A=2B$，∴$A-B=B$，则 $\sin(A-B)=\sin B$，则 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin B$，结合正弦、余弦定理得 $a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b$，化简整理得 $a^2=b(b+c)$；

必要性：由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，且 $a^2=b(b+c)$，得 $b^2+bc=b^2+c^2-2bc\cos A$，

∴$1+2\cos A=\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}$，

即 $\sin B+2\sin B\cos A=\sin C=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

$\therefore \sin B=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A-B)$，

由于 A，B 均为三角形的内角，

故必有 $B=A-B$，即 $A=2B$.

综上，知 $a^2=b(b+c)$的充要条件是 $A=2B$.