

高一数学小练 (14)

姓名: _____ 班级: _____ 考号: _____

一、选择题 (本大题共 6 小题, 共 30.0 分)

1. 集合 $A=\{x|2x-x^2>0\}$, $B=\{x|1\leq x<2\}$, 则 $C_A B=$ ()
A. (0,1) B. (0,1] C. [0,1] D. (1,2)
2. 已知 $f(x)$ 是奇函数, 当 $x>0$ 时 $f(x)=-x(1+x)$, 当 $x<0$ 时, $f(x)$ 等于 ()
A. $-x(1-x)$ B. $x(1-x)$ C. $-x(1+x)$ D. $x(1+x)$
3. 方程 $2^x+x=2$ 的解所在区间是 ()
A. (0,1) B. (1,2) C. (2,3) D. (3,4)
4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}x, & x>0 \\ 3^x, & x\leq 0 \end{cases}$, 则 $f(f(4))$ 的值为 ()
A. $-\frac{1}{9}$ B. -9 C. $\frac{1}{9}$ D. 9
5. 已知函数 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $(-1, 1)$ 上是 x 的减函数, 则 a 的取值范围是 ()
A. (0,2) B. (1,2) C. (1,2] D. $[2, +\infty)$
6. 函数 $f(x)=\begin{cases} (a-5)x-2, & x\geq 2 \\ x^2-2(a+1)x+3a, & x<2 \end{cases}$ 若对任意 $x_1, x_2\in R (x_1\neq x_2)$, 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立, 则实数 a 的取值范围为 ()
A. $(-\infty, 1]$ B. (1,5) C. [1,5) D. [1,4]

二、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

7. 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$, 则 $f(x)=$ _____.
8. 若 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\tan\alpha<0$, 则 $\sin\alpha=$ _____.
9. 函数 $y=\sqrt{\log_{0.5}(4x^2-3x)}$ 的定义域为_____.
10. 若函数 $f(x)=\sqrt{mx^2-6mx+m+8}$ 的定义域为 R , 则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题 (本大题共 3 小题, 共 36.0 分)

11. 设集合 A 为函数 $y=\lg\frac{1+x}{2-x}$ 的定义域, 集合 B 为不等式 $(ax-1)(x+2)\geq 0 (a>0)$ 的解集.
(1) 若 $a=1$, 求 $A\cap B$;
(2) 若 $B\subseteq C_R A$, 求实数 a 的取值范围.

12. 若 $\frac{5\sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = 1$.

(1) 求 $\tan\alpha$ 的值;

(2) 求 $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} + \sin\alpha\cos\alpha$ 的值.

13. 已知函数 $f(x) = a - \frac{2}{2^x + 1}$ 是奇函数 ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 求实数 a 的值;

(2) 试判断函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调性, 并证明你的结论;

(3) 若对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 不等式 $f(t^2 - (m+1)t) + f(t^2 - m - 1) > 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

答案和解析

1. 【答案】A

【解析】

【分析】

此题考察基础集合的补集运算，属于简单题.

解答此题可将两个集合分别表示出来，利用数轴标示法求解补集即可.

【解析】

解: 由 $2x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 2x < 0 \Rightarrow 0 < x < 2$

$\therefore A = \{x | 0 < x < 2\}$

$\therefore C_A B = \{x | 0 < x < 1\}$

故选 A.

2. 【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查函数解析式的求解及奇函数的性质，属基础题.

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 由已知表达式可求得 $f(-x)$, 由奇函数的性质可得 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系, 从而可求出 $f(x)$.

【解答】

解: 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$,

则 $f(-x) = x(1-x)$.

又 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 所以当 $x < 0$ 时 $f(x) = -f(-x) = -x(1-x)$.

故选 A.

3. 【答案】A

【解析】

【解析】构造函数 $f(x) = 2^x + x - 2$, 分别计算区间端点的函数值, 再验证是否符合

函数零点存在的判定内容. 本题考查了函数零点的判定定理应用, 一般的方法

是把方程转变为对应的函数, 求出区间端点的函数值, 并验证它们的符号即可.

【解答】解：令 $f(x)=2^x+x-2$,

A、由 $f(0)=-1$, $f(1)=2+1-2=1$ 知, $f(0)f(1)<0$, 故 A 正确;

B、由 $f(2)=4+2-2=4$, $f(1)=2+1-2=1$ 知, $f(2)f(1)>0$, 故 B 不正确;

C、由 $f(2)=4+2-2=4$, $f(3)=8+3-2=9$ 知, $f(2)f(3)>0$, 故 C 不正确;

D、由 $f(4)=16+4-2=18$, $f(3)=8+3-2=9$ 知, $f(2)f(3)>0$, 故 D 不正确;

故选 A.

4. 【答案】C

【解析】

解：因为 $f(x)=\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}x, & x>0 \\ 3^x, & x\leq 0 \end{cases}$,

$$\therefore f(4)=\log_{\frac{1}{2}}4=-2,$$

$$\therefore f(f(4))=f(-2)=\frac{1}{9}.$$

故选:C.

利用分段函数求值、指数、对数性质及运算法则求解.

本题考查函数值的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意分段函数性质的合理运用.

5. 【答案】B

【解析】

解：原函数是由简单函数 $t=2-ax$ 和 $y=\log_a t$ 共同复合而成.

$\because a>0$, $\therefore t=2-ax$ 为定义域上减函数,

而由复合函数法则和题意得到,

$y=\log_a t$ 在定义域上为增函数, $\therefore a>1$

又函数 $t=2-ax>0$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立, 则 $2-a>0$ 即可.

$\therefore a<2$.

综上, $1<a<2$,

故选:B.

复合函数由 $t=2-ax$, $y=\log_a t$ 复合而成. 再分别分析两个简单函数的单调性, 根据复合函数法则判断.

本题考查函数的单调性的应用, 在解决对数函数问题时, 注意真数位置的范

围. 本题中如若不注意这一点, 会导致答案错误的为 $(1, +\infty)$. 这也是考生的易错点.

6. 【答案】D

【解析】

【分析】

若对任意 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立, 则函数 $f(x)$

$$= \begin{cases} (a-5)x - 2, & x \geq 2 \\ x^2 - 2(a+1)x + 3a, & x < 2 \end{cases}$$

为减函数, 进而根据分段函数单调性的定义, 可得答案.

本题考查的知识点是分段函数的应用, 熟练掌握并正确理解分段函数单调性的定义, 是解答的关键.

【解答】

解: 若对任意 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立,

则函数 $f(x) = \begin{cases} (a-5)x - 2, & x \geq 2 \\ x^2 - 2(a+1)x + 3a, & x < 2 \end{cases}$ 为减函数,

$$\text{则} \begin{cases} 4 - 4(a+1) + 3a \geq 2(a-5) - 2 \\ a+1 \geq 2 \\ a-5 < 0 \end{cases},$$

解得: $a \in [1, 4]$,

故选: D.

7. 【答案】 $x^2 - 1, (x \geq 1)$.

【解析】

解: $\because f(\sqrt{x} + 1) = x + 2\sqrt{x}$

$$= x + 2\sqrt{x} + 1 - 1$$

$$= (\sqrt{x} + 1)^2 - 1,$$

$$\therefore \text{则 } f(x) = x^2 - 1, (x \geq 1).$$

故填: $x^2 - 1, (x \geq 1)$.

将 $\sqrt{x} + 1$ 看成是一个整体, 对 $x + 2\sqrt{x}$ 进行配凑, 配成 $(\sqrt{x} + 1)^2 - 1$ 的形式, 观察即可求得 $f(x)$ 的表达式.

已知 $f[g(x)] = h(x)$, 求 $f(x)$ 的问题, 若用配凑法难求时, 可设 $g(x) = t$, 从中解

出 x , 再代入 $h(x)$ 进行换元来解. 在换元的同时, 一定要注意“新元”的取值范

围. 换元法和配凑法在解题时可以通用, 若一题能用换元法求解析式, 则也能用配凑法求解析式, 相比较而言, 换元法更便于操作.

8. 【答案】 $-\frac{4}{5}$

【解析】

解: $\because \cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\tan \alpha < 0$, 则 $\sin \alpha < 0$, 且 $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$,

故答案为: $-\frac{4}{5}$.

由条件利用同角三角函数的基本关系求得 $\sin \alpha$ 的值.

本题主要考查同角三角函数的基本关系, 属于基础题.

9. 【答案】 $[-\frac{1}{4}, 0) \cup (\frac{3}{4}, 1]$

【解析】

解: 要使原函数有意义, 需要 $\log_{0.5}(4x^2 - 3x) \geq 0$, 即 $0 < 4x^2 - 3x \leq 1$,

解得: $-\frac{1}{4} \leq x < 0$, 或 $\frac{3}{4} < x \leq 1$.

所以原函数的定义域为 $[-\frac{1}{4}, 0) \cup (\frac{3}{4}, 1]$.

故答案为 $[-\frac{1}{4}, 0) \cup (\frac{3}{4}, 1]$.

题目给出的函数式是无理式, 因此首先要保证根式内部的代数式大于等于 0,

而根式内部又是对数式, 除借助对数函数的单调性外还要保证真数大于 0.

本题考查对数函数的定义域, 考查学生发现问题解决问题的能力, 是基础题.

10. 【答案】 $0 \leq m \leq 1$

【解析】

解: 依题意, 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $mx^2 - 6mx + m + 8 \geq 0$ 恒成立.

当 $m = 0$ 时, $x \in \mathbb{R}$;

当 $m \neq 0$ 时, $\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ m > 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} (-6m)^2 - 4m(m + 8) \leq 0 \\ m > 0 \end{cases}$, 解之得 $0 < m \leq 1$.

故答案为 $0 \leq m \leq 1$.

利用该函数的被开方数大于等于零得出该函数有意义需满足的不等式, 结合

恒成立问题得出字母 m 满足的不等式

本题考查偶次根式的定义域的求解,考查不等式恒成立问题的解决办法,关键要进行等价转化.

11.【答案】解: (1) 由函数 $y=\lg\frac{1+x}{2-x}$ 有意义得 $\frac{1+x}{2-x}>0$, 即 $(1+x)(2-x)>0$,

解得 $-1<x<2$, 即 $A=\{x|-1<x<2\}$.

解不等式 $(x-1)(x+2)\geq 0$ 得 $x\leq -2$ 或 $x\geq 1$, 即 $B=\{x|x\leq -2$ 或 $x\geq 1\}$.

$\therefore A\cap B=\{x|1\leq x<2\}$.

(2) 由 (1) 知 $\complement_{\mathbb{R}}A=\{x|x\leq -1$ 或 $x\geq 2\}$,

解不等式 $(ax-1)(x+2)\geq 0$ 得 $x\leq -2$ 或 $x\geq \frac{1}{a}$, 即 $B=\{x|x\leq -2$ 或 $x\geq \frac{1}{a}\}$,

$\because B\subseteq \complement_{\mathbb{R}}A$, $\therefore \frac{1}{a}\geq 2$, 解得 $0<a\leq \frac{1}{2}$.

【解析】

(1) 分别求出 A、B, 再计算交集;

(2) 求出 B 和 $\complement_{\mathbb{R}}A$, 比较两集合端点值的大小即可得出 a 的范围.

本题考查了集合的运算, 对数函数的定义域, 属于中档题.

12.【答案】解: (1) 由 $\frac{5\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=1$, 得 $\frac{5\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=1$,

即 $5\tan\alpha-1=1+\tan\alpha$, 解得 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$;

(2) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}+\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+1}=\frac{17}{5}$.

【解析】

(1) 把已知等式化弦为切, 求解可得 $\tan\alpha$ 的值;

(2) 把要求值的式子化弦为切, 代入 (1) 中求得的 $\tan\alpha$ 得答案.

本题考查三角函数的化简求值, 考查同角三角函数基本关系式的应用, 是基础题.

13.【答案】解: (1) $\because f(x)$ 是奇函数在原点有定义;

$\therefore f(0)=a-1=0$

$\therefore a=1$;

(2) $f(x)=1-\frac{2}{2^x+1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 证明如下:

设 $x_1<x_2$, 则:

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2}{2^{x_2}+1}-\frac{2}{2^{x_1}+1}=\frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)};$$

$$\because x_1 < x_2;$$

$$\therefore 2^{x_1} < 2^{x_2}, 2^{x_1} - 2^{x_2} < 0;$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2);$$

$\therefore f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数;

(3) 由 (1)、(2) 知, $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, 且是奇函数;

$$\therefore f(t^2 - (m+1)t) + f(t^2 - m - 1) > 0;$$

$$\therefore f(t^2 - (m+1)t) > -f(t^2 - m - 1) = f(-t^2 + m + 1);$$

$$\therefore t^2 - (m+1)t > -t^2 + m + 1;$$

即 $2t^2 - (m+1)t - (m+1) > 0$ 对任意 $t \in \mathbb{R}$ 恒成立;

$$\text{只需 } \Delta = (m+1)^2 + 4 \cdot 2 \cdot (m+1) = m^2 + 10m + 9 < 0;$$

解之得 $-9 < x < -1$;

$\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $(-9, -1)$.

【解析】

(1) 根据 $f(x)$ 为奇函数, 并且在原点有定义, 从而 $f(0)=0$, 求出 $a=1$;

(2) 容易判断 $f(x) = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$ 为增函数, 根据增函数定义, 设任意的 $x_1 < x_2$, 然后作差, 通分, 根据指数函数的单调性便可证明 $f(x_1) < f(x_2)$, 从而得出 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增;

(3) 根据 $f(x)$ 为奇函数, 以及在 $\mathbb{R}$ 上单调递增便可根据不等式 $f(t^2 - (m+1)t) + f(t^2 - m - 1) > 0$ 恒成立得出不等式 $2t^2 - (m+1)t - (m+1) > 0$ 对任意 $t \in \mathbb{R}$ 恒成立, 从而得出判别式 $\Delta = m^2 + 10m + 9 < 0$, 解该不等式便可得出实数 m 的取值范围.

考查奇函数的定义, 增函数的定义, 指数函数的单调性, 以及根据增函数定义证明一个函数为增函数的方法和过程, 根据奇函数定义和增函数定义解不等式的方法, 一元二次不等式恒大于 0 时, 判别式 Δ 的取值情况.