

平变为现实的发展水平,并创造新的“最近发展区”,使教学走在发展的前面;③教学要精选素材,因此教师要研究教材、研究课标、研究考题、研究学生;④教学要重视学生在课堂中的再体验,引导学生“怎样想到这样解、为什么这么想、遇到哪些问题可以这样想”;让学生亲历体验解题活动,给学生整理和体会的时间甚至再做一遍;留足时间让学生领悟,也是学生思维向纵深发展,培养学生逻辑推理、数学运算素养与渗透数学思想方法的重要途径;⑤教学要重视学生课后的变式训练,形式类同,但内

容更广或思维培养要求更高;试题有梯度,是由易到难,层层深入;紧扣主题,体现数学本质;题目少而精,解法多样;新颖有亮点,考验学生灵活多变能力。

总之,教师在让“一题多解”充分发挥效用,为提升思维能力而教,为发展核心素养而教!

参考文献

- [1]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S].北京:人民教育出版社,2020.

是教“套路”还是发展学生思维素养?^{*}

合肥工业大学附属中学 (230009) 王 峰

安徽省合肥科学岛实验中学 (230031) 邵利荣

题目 已知 $\tan(\alpha + \beta) = 3$, $\tan(\alpha - \beta) = 5$, 则 $\tan 2\alpha =$ _____.

生: 设 $\tan \alpha = x$, $\tan \beta = y$, 则由 $\begin{cases} \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 3, \\ \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = 5, \end{cases}$ 得

$\begin{cases} \frac{x+y}{1-xy} = 3, \\ \frac{x-y}{1+xy} = 5, \end{cases}$ 消 y 得 $2x^2 - 7x - 2 = 0$, 即 $2\tan^2 \alpha - 7\tan \alpha - 2 = 0$, 由一元二次方程的求根公式可求出

$\tan \alpha = \frac{7 \pm \sqrt{57}}{4}$, 但将 $\tan \alpha = \frac{7 \pm \sqrt{57}}{4}$ 代入 $\tan 2\alpha =$

$\frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ 求解时遇到了困难而受阻: 一是因为 $\tan \alpha$ 有两个值, 故需要分两种情况进行; 二是将 $\tan \alpha = \frac{7 \pm \sqrt{57}}{4}$ 代入 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ 运算较繁.

至此, 不少教师可能为此, 就没加多想, 就认为这种方法太繁了而盲目舍弃, 转而介绍自己设计的方法: 因为 $2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)$, 所以 $\tan 2\alpha =$

$\tan[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{1 - \tan(\alpha + \beta)\tan(\alpha - \beta)}$
 $= \frac{3+5}{1-3 \times 5} = -\frac{4}{7}$. 此法的确快速, 但学生在首次遇到此类问题时, “变角”的技巧是巧妙, 但学生却想

不到, 而学生自然想到的是将 $\tan(\alpha + \beta) = 3$ 与 $\tan(\alpha - \beta) = 5$ 两式拆开运算, 面对学生的这种思路的解答困难, 教师是顺势而为, 还是认为学生的这种方法笨拙而不屑一顾呢? 关键看教师对数学教学的培养目标的定位是什么, 是培养学生解题套路, 还是发展学生思维素养? 若受传统的应试教育的影响, 在这种思维模式下, 教师就会采取独断专行的做法, 一味向学生灌输解题套路, 视学生的想法与感受于不顾, 将学生培养成只会采用僵化的解题模式处理问题, 而缺乏自己的想法, 完全是教师牵着鼻子转, 主观能动性得不到充分的发挥, 创新意识与创新能力就无从谈起.

值得庆幸的是, 国家教育主管部门已经看到了当下学科教育的弊端, 正在进行大胆的改革, “立德树人”的教育教学理念正在走进课堂, 教师的教學理念也在悄悄地发生变化, 即由教师自己的“主演”把握“导演”, 让学生成为“主演”, 这样一来, 关注学生的想法就理应成为今后数学教学的主旋律, 虽然学生的想法看似比较幼稚, 但它是基于学生自身的学科认知水平进行思考的, 是学生思维培养的主要抓手. 为此, 在教学中一定要倾听学生的想法, 当学生的想法走不通时, 教师应该帮助学生分析一下问题所在, 以走出困境, 而不是固执己见, 用自己熟悉的解题套路去帮学生“洗脑”, 殊不知, 教会学生如何思考才是培养学生思维能力的主渠道, 即学生的

* 本文系安徽省教育信息技术研究课题《基于“互联网+”落实高中数学核心素养的实践研究》(立项号: AH2019047) 的阶段性研究成果.

思维能力培养一定要有学生自己的想法才行,如上述本例中学生利用求根公式求出 $\tan\alpha = \frac{7 \pm \sqrt{57}}{4}$ 之后,估计将其代入 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$ 求 $\tan 2\alpha$ 就失去了继续求解的信心,心里就会想:这种方法运算太繁了,走不通,此时教师如果不去支支招,而是全盘否定之,大讲特讲自己的妙招,这样一对比,学生就会有一种失败感,自卑心里油然而生,以后也就没有“想做”了冲动,会认为再做也做不出来,也做不出像老师那样的妙法.而事实上,学生却不知道,教师之所以一讲就是“高大上”的方法,是因为教师要么此类题见多了,其好的解法已烂熟于心了,故教学时当然就选择自己最拿手的方法了,故显得教师是多么的“聪明”;另一方面,教师没有将当初第一次解决此类问题时的失败经历与挫折或走过的曲折道路展现给学生,就会给学生造成错觉,认为老师那么聪明,自己如此笨,正因为如此,现在的学生缺乏自信与兴趣.笔者前不久在刚刚升入高一年的学生中作了调查就印证了这一事实,一个 50 人的班级,笔者问:“对学习数学有兴趣的同学请举手”,结果就 8 个学生举手,接着笔者又追问到:“对学习数学有自信的同学请举手”,而这次举手的更少,才 5 人,这一现象说明了培养学生的兴趣与信心已刻不容缓,它已成为我们数学教学质量进一

步提升的羁绊.

笔者认为学生对数学不能产生兴趣及不自信,关键是我们教师教学关注学生的少,没有注重学生兴趣及自信心的培养,没有将学生看成一个有思想的人,而将学生看作是一个个装“解题方法与套路”的容器,教师与学生沟通交流的少,更听不到教师的肯定与赞美的话语,学生成长的环境就是充满失败与困难,而一点找不到成就感,哪来的自信与兴趣?对此,笔者认为只要我们教师改变一下教育观念,加大对想法的关注与帮助,鼓励学生将他们的想法斗争到底,虽然很繁,也要继续下去,以让学生知道自己的想法并不错,也是正确的,只不过运算稍微麻烦一下,或者没有看到里面蕴含的运算技巧罢了,如对于 $2\tan^2\alpha - 7\tan\alpha - 2 = 0$, 如果不使用求根公式求出 $\tan\alpha$, 而是变为 $2(1 - \tan^2\alpha) = -7\tan\alpha$, 将此时直接代入 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$, 就容易得到 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = -\frac{4}{7}$, 经过这样的一点拨,让学生看到自己的想法也是很好的,自然就产生了成就感,此时教师要及时加以表扬与呵护,学生得到了教师的肯定与赞扬,无形中就会激起学生去主动地解决问题的欲望,这也许就是学生自信与兴趣的有力体现吧!

一道高考导数压轴题的命制手法

福建省福清第三中学 (350315) 何 灯

王国维《人间词话》总结人生三层境界:第一层“昨夜西风凋碧树,独上高楼,望尽天涯路”;第二层“衣带渐宽终不悔,为伊消得人憔悴”;第三层“众里寻他千百度,蓦然回首,那人却在灯火阑珊处”^[1]. 其实数学解题也是有境界的,第一层境界“正确解题”;第二层境界“一题多解”;第三层境界“多题一解”;第四层境界“发现定理”;第五层境界“自己编题”. 诚然,不是所有的人都具备编题的能力,但是,钻研历年高考真题,探究其命题规律,遵循规律进行解题、析题、命题、教题,不失为跳出“题海”,快速提升自身境界的一个行之有效的途径.

本文笔者以 2018 年全国卷 I 理科数学压轴题为例,探究其命题手法,借助此手法,实现试题的一般性拓展,并编制出相同类型的试题. 文中所述只

是笔者对命题者命题过程的思考、揣测、推演,可能并非命题者的命题意图,仅供读者参考.

一、原题再现

题 1 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明:
$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2.$$

本题是考查学生逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养的一道好题. 该题曾作为 2011 年湖南文科数学压轴题,且设问类似.

题 2 设函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;